Prof. Ralf-W. Boddenberg
Baustatik und Holzbau

Hochschule Wismar

Übungen
Technische Mechanik I
Lösungen

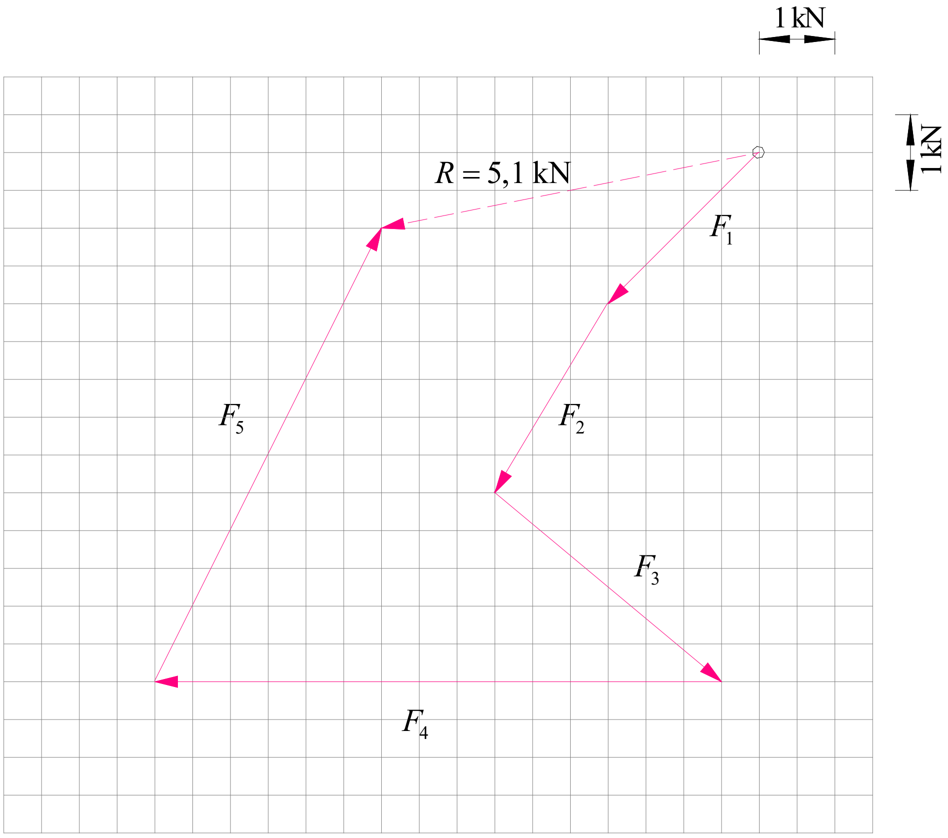
Wintersemester 2017/2018

Inhaltsverzeichnis Lösungen zu Übungen Technische Mechanik I

2 Zentrale Kraftsysteme Übungen

2.1 Ebene zentrale Kräftegruppe

a) Zeichnerische Lösung



b) Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

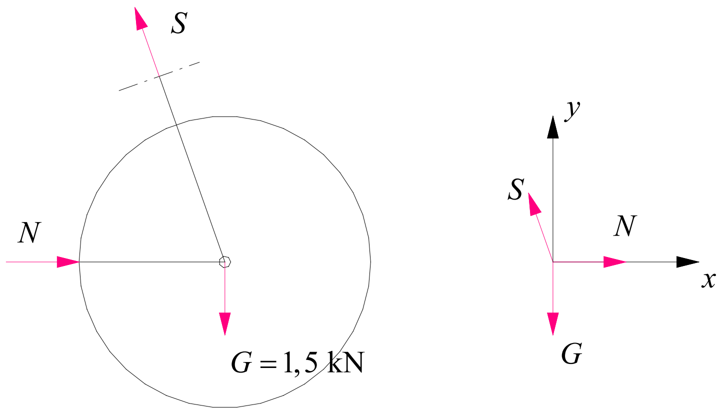
$$\underline{F}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \end{bmatrix}; \qquad \underline{F}_2 = \begin{bmatrix} -1,5 \\ -2,5 \end{bmatrix}; \qquad \underline{F}_3 = \begin{bmatrix} +3 \\ -2,5 \end{bmatrix}; \qquad \underline{F}_4 = \begin{bmatrix} -7,5 \\ 0 \end{bmatrix}; \qquad \underline{F}_5 = \begin{bmatrix} +3 \\ +6 \end{bmatrix}$$

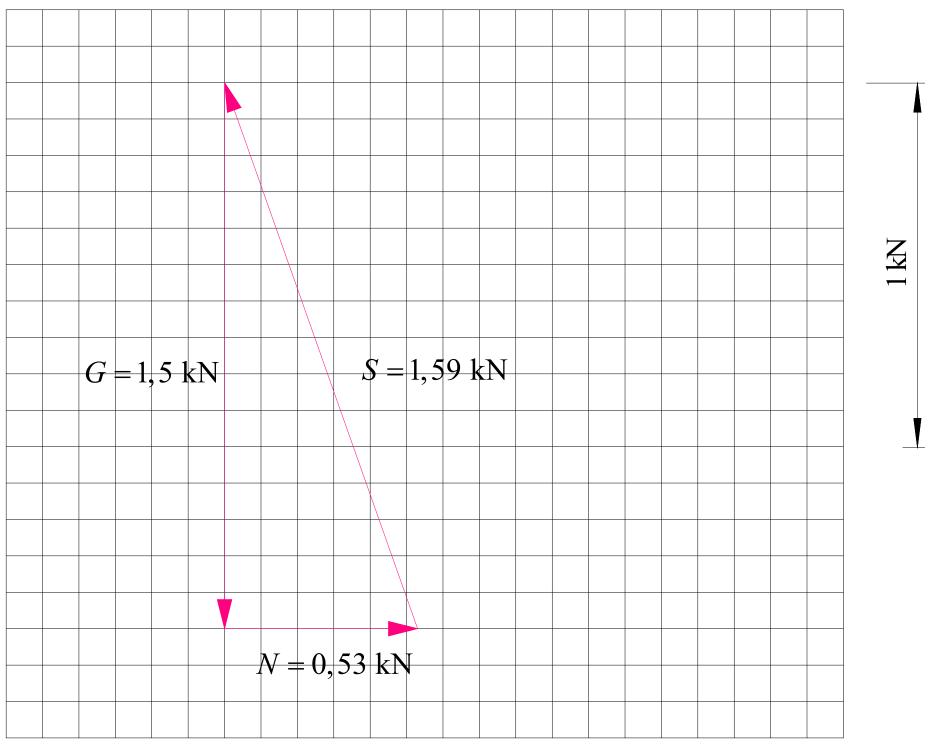
$$\underline{R} = \underline{F} + \underline{F}_2 + \underline{F}_3 + \underline{F}_4 + \underline{F}_5 = \begin{bmatrix} -2 - 1,5 + 3 - 7,5 + 3 \\ -2 - 2,5 - 2,5 + 0 + 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$R = \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2} = \sqrt{26} = 5,1\ \mathrm{kN}$$

2.2 Hängende Kugel

a) grafische Lösung





b) rechnerische Lösung

Vektorrechnung:

$$h^2 + 20^2 = 60^2 \rightarrow h = \sqrt{60^2 - 20^2} = 56{,}57 \text{ cm}$$

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}5 \end{bmatrix};$$

$$\left.\begin{aligned} \underline{n} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{(beliebiger Vektor in Richtung } \underline{N}\text{)} \\ \underline{s} &= \begin{bmatrix} -20 \\ 56{,}57 \end{bmatrix} \quad \text{(beliebiger Vektor in Richtung } \underline{S}\text{)} \end{aligned}\right\} \begin{cases} \underline{N} = a \cdot \underline{n} \\ \underline{S} = b \cdot \underline{s} \end{cases}$$

$$\underline{G} + \underline{N} + \underline{S} = \underline{0}$$

$$\underline{G} + a \cdot \underline{n} + b \cdot \underline{s} = \underline{0}$$

$$a \cdot \underline{n} + b \cdot \underline{s} = -\underline{G}$$

$$a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} -20 \\ 56{,}57 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}5 \end{bmatrix}$$

$$(1) \quad a - 20b \quad = 0$$

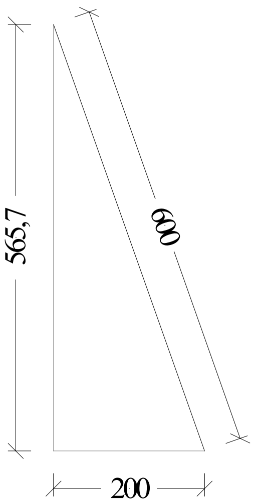
$$(2) \quad 0 + 56{,}57b = 1{,}5 \quad \rightarrow b = \frac{1{,}5}{56{,}57} = 0{,}0265$$

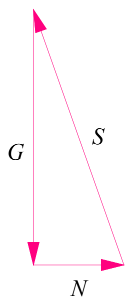
$$\text{in } (1) \rightarrow a = 20 \cdot 0{,}0265 = 0{,}530$$

$$\underline{N} = a \cdot \underline{n} = 0{,}53 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \rightarrow N = |\underline{N}| = 0{,}53 \cdot \sqrt{1^2 + 0^2} = 0{,}53 \text{ kN}$$

$$\underline{S} = b \cdot \underline{s} = 0{,}0265 \cdot \begin{bmatrix} -20 \\ 56{,}57 \end{bmatrix} \quad \rightarrow S = |\underline{S}| = 0{,}0265 \cdot \sqrt{(-20)^2 + 56{,}57^2} = 1{,}59 \text{ kN}$$

Alternative rechnerische Lösung über ähnliche Dreiecke:





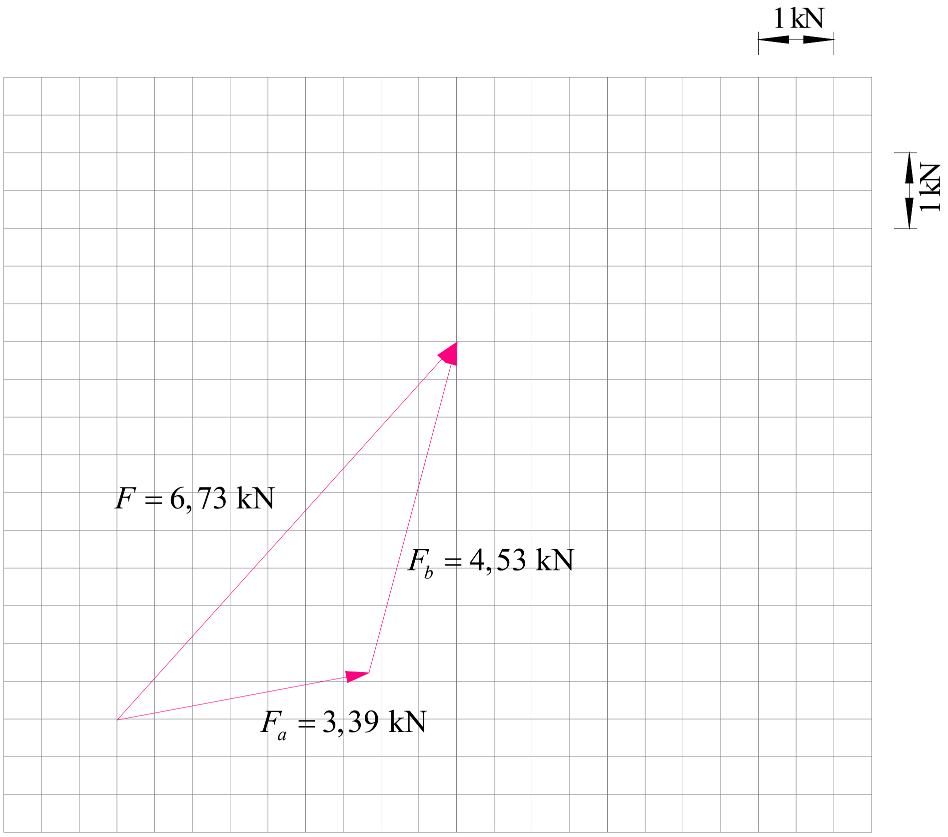
$$\frac{N}{G} = \frac{200}{565{,}7} \rightarrow N = G \cdot \frac{200}{565{,}7} = 1{,}5 \cdot \frac{200}{565{,}7} = 0{,}530 \text{ kN}$$

$$\frac{S}{G} = \frac{600}{565{,}7} \rightarrow S = G \cdot \frac{600}{565{,}7} = 1{,}5 \cdot \frac{600}{565{,}7} = 1{,}59 \text{ kN}$$

sehr einfache Lösung!

2.3 Zerlegung einer Kraft in der Ebene

a) zeichnerische Lösung



b) Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Richtungsvektoren $\underline{A}, \underline{B}$ in Richtung von a, b und Vektor $\underline{F}$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 8,0 \\ 1,5 \end{bmatrix}; \quad \underline{B} = \begin{bmatrix} 2,0 \\ 7,5 \end{bmatrix}; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 5,0 \end{bmatrix}; \quad \underline{F}_a = a \cdot \underline{A}; \underline{F}_b = b \cdot \underline{B}$$

$$\underline{F}_a + \underline{F}_b = \underline{F} \rightarrow a \cdot \underline{A} + b \cdot \underline{B} = \underline{F}$$

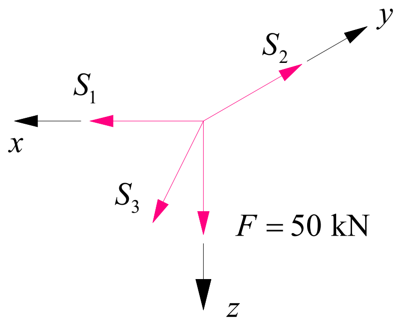
Allgemeine Lösung:	Unser Beispiel:
$a \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$	$a \cdot \begin{bmatrix} 8,0 \\ 1,5 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} 2,0 \\ 7,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,5 \\ 5,0 \end{bmatrix}$
$D = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x$	$D = 8,0 \cdot 7,5 - 1,5 \cdot 2,0 = 57,0$
$a = -\dfrac{B_x \cdot F_y - B_y \cdot F_x}{D}$	$a = -\dfrac{2,0 \cdot 5,0 - 7,5 \cdot 4,5}{57,0} = \dfrac{23,75}{57,0} = 0,4167$
$b = +\dfrac{A_x \cdot F_y - A_y \cdot F_x}{D}$	$b = +\dfrac{8,0 \cdot 5,0 - 1,5 \cdot 4,5}{57} = \dfrac{33,25}{57,0} = 0,5833$

$$\underline{F}_a = a \cdot \underline{A} = 0,4167 \cdot \begin{bmatrix} 8,0 \\ 1,5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow F_a = \left|\underline{F}_a\right| = 0,4167 \cdot \sqrt{8^2 + 1,5^2} = 3,39 \text{ kN}$$

$$\underline{F}_b = b \cdot \underline{B} = 0,5833 \cdot \begin{bmatrix} 2,0 \\ 7,5 \end{bmatrix} \quad \rightarrow F_b = \left|\underline{F}_b\right| = 0,5833 \cdot \sqrt{2,0^2 + 7,5^2} = 4,53 \text{ kN}$$

2.4 Räumliche Zerlegung einer Einzelkraft

Richtungsvektoren $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ in Richtung von $\underline{S}_1$, $\underline{S}_2$, $\underline{S}_3$



$$\underline{A} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}; \underline{B} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}; \underline{C} = \begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix} \qquad (\underline{A} \text{ und } \underline{B} \text{ sind Einheitsvektoren})$$

Gleichgewichtsbedingung:

$\underline{S}_1 = a \cdot \underline{A}; \qquad \underline{S}_2 = b \cdot \underline{B}; \qquad \underline{S}_3 = c \cdot \underline{C}$

$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{S}_3 + \underline{F} = \underline{0}$

$a \cdot \underline{A} + b \cdot \underline{B} + c \cdot \underline{C} + \underline{F} = \underline{0}$

Lösung:

$$a \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} + c \cdot \begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\50\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$(1): 1a + 0b + 4c = 0$

$(2): 0a + 1b + 3c = 0$

$(3): 0a + 0b + 5c = -50 \rightarrow c = -10$

in $(2): b = -3c = -3 \cdot (-10) = 30$

in $(1): a = -4c = -4 \cdot (-10) = 40$

Stab- und Seilkräfte:

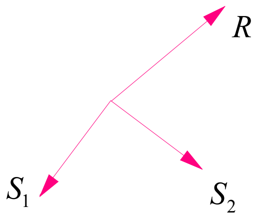
$$\underline{S}_1 = a \cdot \underline{A} = 40 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \rightarrow S_1 = |\underline{S}_1| = a \qquad = \quad 40,0 \text{ kN}$$

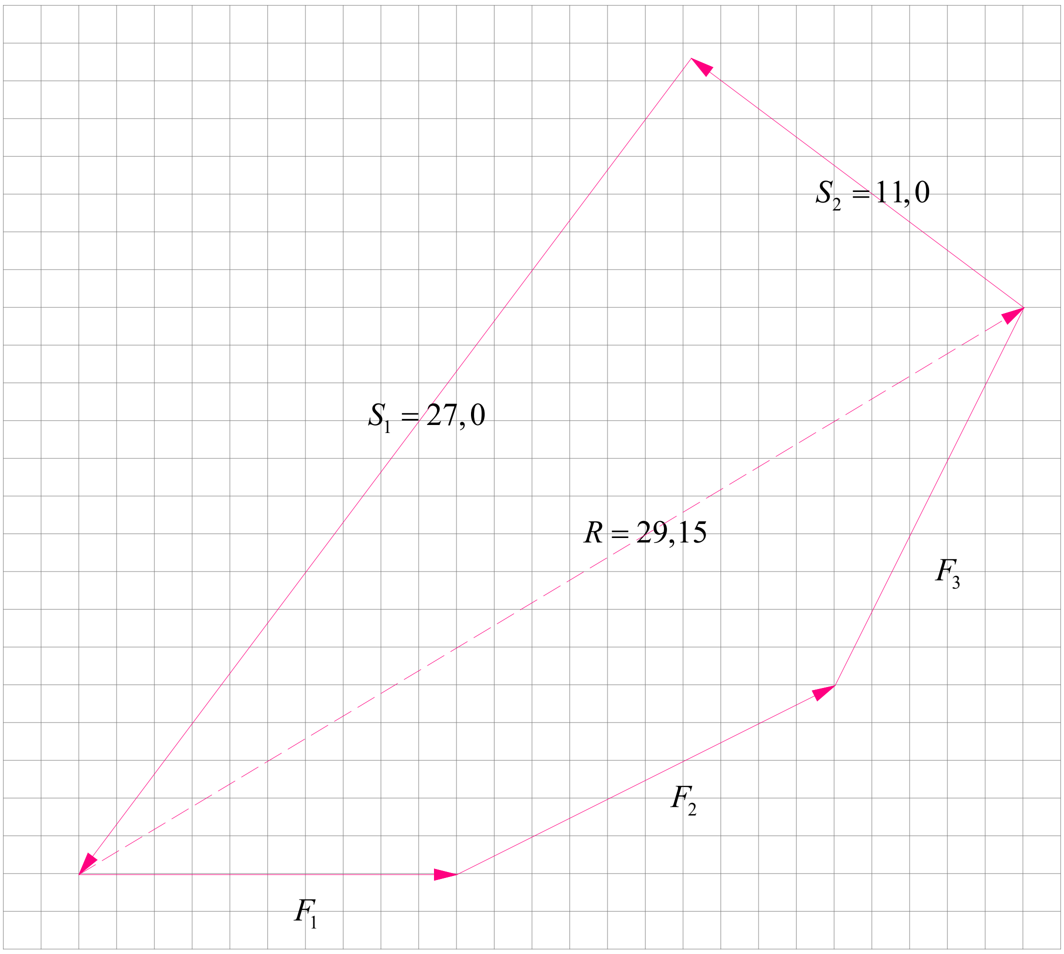
$$\underline{S}_2 = b \cdot \underline{B} = 30 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \rightarrow S_2 = |\underline{S}_2| = b \qquad = \quad 30,0 \text{ kN}$$

$$\underline{S}_3 = c \cdot \underline{C} = -10 \cdot \begin{bmatrix}4\\3\\5\end{bmatrix} \qquad \rightarrow S_3 = |\underline{S}_3| = -10 \cdot \sqrt{4^2 + 3^2 + 5^2} \qquad = \quad -70,7 \text{ kN}$$

2.5 Resultierende einer zentralen Kräftegruppe und Berechnung von Stabkräften

a) grafische Lösung



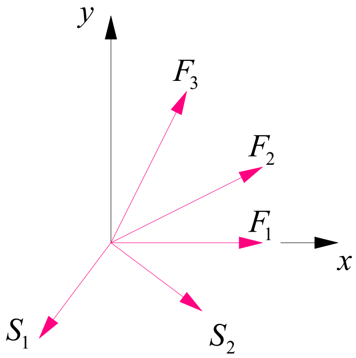


b) Lösung mit Hilfe der Vektorrechnung

Richtungsvektoren $\underline{A}$ und $\underline{B}$ in Richtung von $\underline{S}_1$ und $\underline{S}_2$

$$\underline{A}=\begin{bmatrix}-3\\-4\end{bmatrix};\quad \underline{B}=\begin{bmatrix}+4\\-3\end{bmatrix}$$

$$\underline{F}_1=\begin{bmatrix}10\\0\end{bmatrix};\quad \underline{F}_2=\begin{bmatrix}10\\5\end{bmatrix};\quad \underline{F}_3=\begin{bmatrix}5\\10\end{bmatrix}\rightarrow \underline{R}=\begin{bmatrix}10+10+5\\0+5+10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}25\\15\end{bmatrix}$$



Gleichgewichtsbedingung:

$$\underline{S}_1 + \underline{S}_2 + \underline{R} = \underline{0}$$
$$a \cdot \underline{A} + b \cdot \underline{B} + \underline{R} = \underline{0}$$
$$a \cdot \underline{A} + b \cdot \underline{B} = -\underline{R}$$

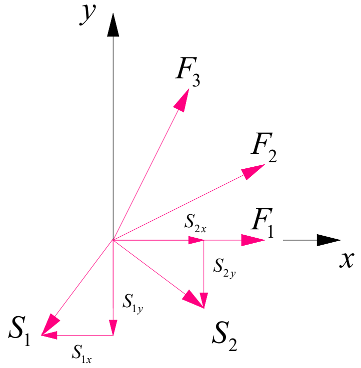
Allgemeine Lösung:	Unser Beispiel:
$a \cdot \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \end{bmatrix}$	$a \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} + b \cdot \begin{bmatrix} +4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25 \\ -15 \end{bmatrix}$
$D = A_x \cdot B_y - A_y \cdot B_x$	$D = (-3)\cdot(-3) - (-4)\cdot 4 = +25$
$a = -\dfrac{B_x \cdot F_y - B_y \cdot F_x}{D}$	$a = -\dfrac{4\cdot(-15) - (-3)\cdot(-25)}{25} = \dfrac{135}{25} = 5{,}4$
$b = +\dfrac{A_x \cdot F_y - A_y \cdot F_x}{D}$	$b = +\dfrac{(-3)\cdot(-15) - (-4)\cdot(-25)}{25} = \dfrac{-55}{25} = -2{,}2$

$$\underline{S}_1 = 5{,}4 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16{,}2 \\ -21{,}6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow S_1 = \left|\underline{S}_1\right| = \sqrt{(-16{,}2)^2 + (-21{,}6)^2} = 27{,}0 \text{ kN (Zug)}$$

$$\underline{S}_2 = -2{,}2 \cdot \begin{bmatrix} +4 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8{,}8 \\ +6{,}6 \end{bmatrix} \quad \rightarrow S_2 = \left|\underline{S}_2\right| = \sqrt{(-8{,}8)^2 + 6{,}6^2} = 11{,}0 \text{ kN (Druck)}$$

c) Lösung durch Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen der x- und y-Komponenten der Kräfte

$$(1) \quad F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} - S_{1x} + S_{2x} = 0$$
$$10 + 10 + 5 - S_{1x} + S_{2x} = 0 \quad \rightarrow S_{1x} - S_{2x} = 25$$
$$(2) \quad F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} - S_{1y} - S_{2y} = 0$$
$$0 + 5 + 10 - S_{1y} - S_{2y} = 0 \quad \rightarrow S_{1y} + S_{2y} = 15$$
$$(3) \quad \frac{S_{1x}}{S_{1y}} = \frac{3}{4} \quad \rightarrow S_{1x} = \frac{3}{4} S_{1y}$$
$$(4) \quad \frac{S_{2x}}{S_{2y}} = \frac{4}{3} \quad \rightarrow S_{2x} = \frac{4}{3} S_{2y}$$



$$(3) \text{ und } (4) \text{ in } (1): \frac{3}{4} S_{1y} - \frac{4}{3} S_{2y} = 25 \quad \rightarrow S_{2y} = -\frac{3}{4}\left(25 - \frac{3}{4} S_{1y}\right) = \frac{9}{16} S_{1y} - \frac{75}{4}$$

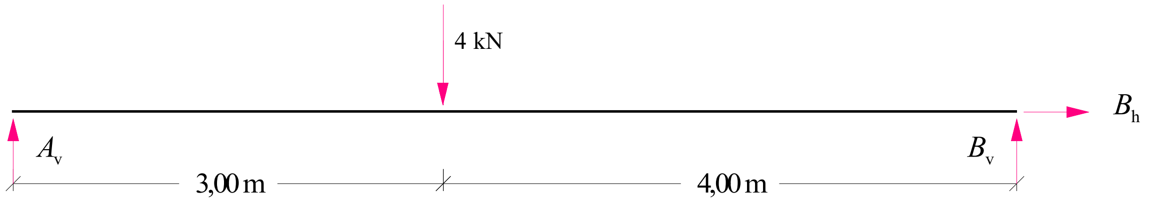
$$\left.\begin{aligned}
&\text{in } (2): && S_{1y} + \frac{9}{16} S_{1y} - \frac{75}{4} = 15 && \rightarrow \frac{25}{16} S_{1y} = \frac{60+75}{4} && \rightarrow S_{1y} = 21{,}6 \text{ kN} \\
&\text{in } (3): && S_{1x} = \frac{3}{4} S_{1y} && && \rightarrow S_{1x} = 16{,}2 \text{ kN} \\
&(1): && S_{1x} - S_{2x} = 25 && \rightarrow S_{2x} = -25 + 16{,}2 && \rightarrow S_{2x} = -8{,}8 \text{ kN} \\
&(2): && S_{1y} + S_{2y} = 15 && \rightarrow S_{2y} = 15 - 21{,}6 && \rightarrow S_{2y} = -6{,}6 \text{ kN}
\end{aligned}\right\} \begin{array}{|l} \text{Vorzeichen} \\ \text{bezogen auf} \\ \text{Zeichnung oben} \end{array}$$

$$S_1 = \sqrt{S_{1x}^2 + S_{1y}^2} = \sqrt{16{,}2^2 + 21{,}6^2} = 27{,}0 \text{ kN (Zug)}$$
$$S_2 = \sqrt{S_{2x}^2 + S_{2y}^2} = \sqrt{(-8{,}8)^2 + (-6{,}6)^2} = 11{,}0 \text{ kN (Druck)}$$

4 Lagerreaktionen Übungen

4.1 Einfeldbalken mit Einzellast

Schnittdarstellung:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum H = 0: \qquad B_h = 0$$

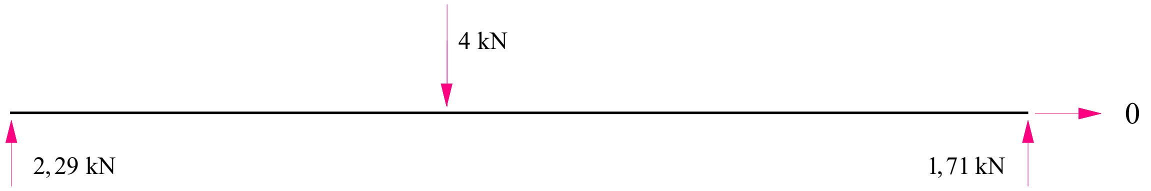
$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -4 \cdot 3 + B_v \cdot 7 = 0 \rightarrow \qquad B_v = \frac{12}{7} = 1{,}71 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad 4 - A_v - B_v = 0 \rightarrow \qquad A_v = 4 - B_v = \frac{28-12}{7} = \frac{16}{7} = 2{,}29 \text{ kN}$$

Kontrolle:

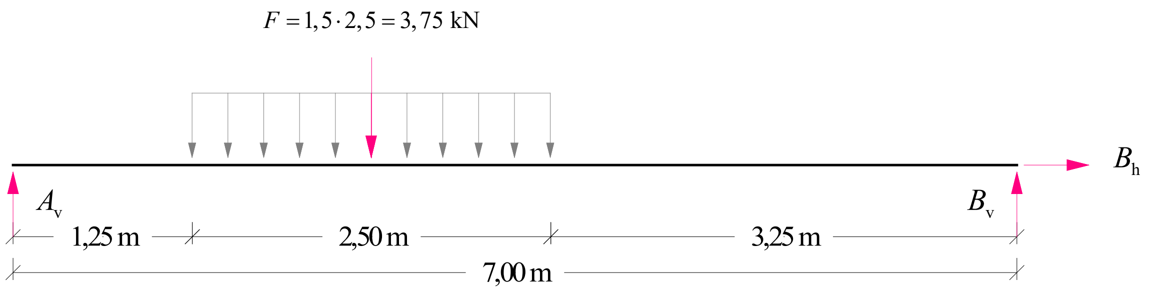
$$\sum M^{(B)} = 0: \quad -A_v \cdot 7 + 4 \cdot 4 = -\frac{16}{7} \cdot 7 + 16 = -16 + 16 = 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Ergebnisdarstellung:



4.2 Einfeldbalken mit Gleichstreckenlast

Schnittdarstellung:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum H = 0: \qquad B_h = 0$$

$$\sum M^{(A)} = 0: -3{,}75 \cdot 2{,}5 + B_v \cdot 7 = 0 \rightarrow \qquad B_v = \frac{9{,}375}{7} = 1{,}34 \text{ kN}$$

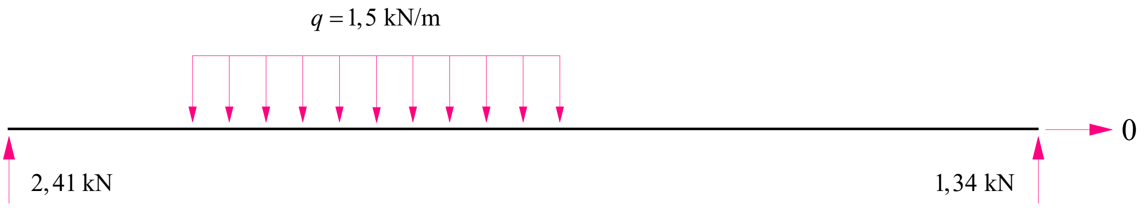
$$\sum V = 0: \quad 3{,}75 - A_v - B_v = 0 \rightarrow \qquad A_v = 3{,}75 - B_v = 3{,}75 - 1{,}34 = 2{,}41 \text{ kN}$$

Kontrolle:

$$\sum M^{(B)} = 0: -A_v \cdot 7 + 3{,}75 \cdot 4{,}50 = -2{,}41 \cdot 7 + 3{,}75 \cdot 4{,}50$$

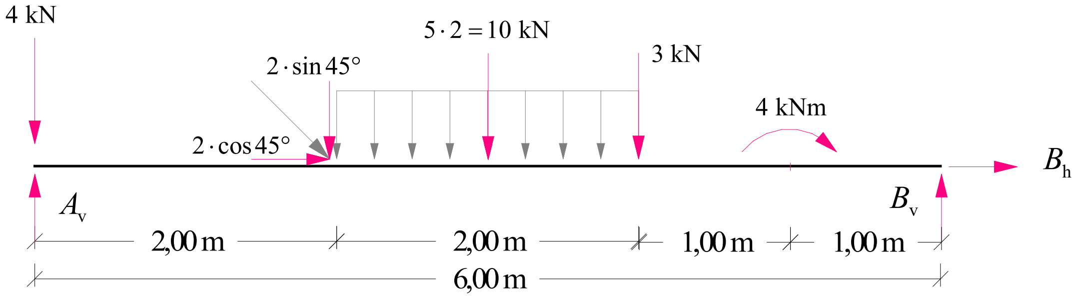
$$= -16{,}870 + 16{,}875 \approx 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Ergebnisdarstellung:



4.3 Einfeldbalken mit Gleichstreckenlast, Einzelkraft und Einzelmoment

Schnittdarstellung:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$\sum H = 0: \quad 2 \cdot \cos 45° + B_h = 0 \rightarrow \qquad B_h = -2 \cdot \cos 45° = -1,41 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0: -2 \cdot \sin 45° \cdot 2 - 10 \cdot 3 - 3 \cdot 4 - 4 + B_v \cdot 6 = 0 \rightarrow \quad B_v = \frac{1}{6} \cdot (2,82 + 30 + 12 + 4) = 8,14 \text{ kN}$$

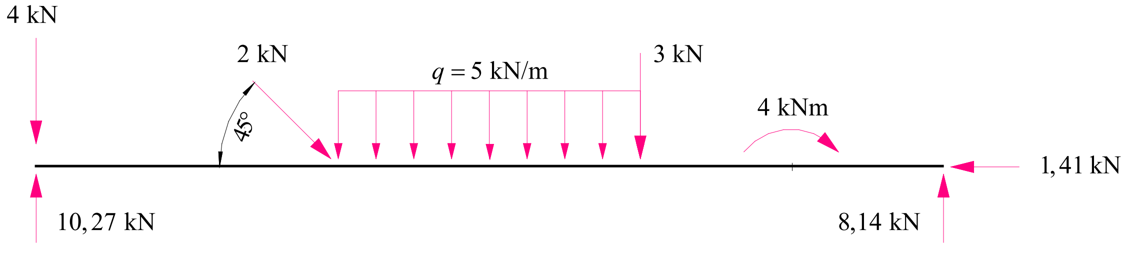
$$\sum V = 0: \quad \underbrace{4 + 2 \cdot \sin 45° + 10 + 3}_{=18,41} - A_v - \underbrace{B_v}_{8,14} = 0 \rightarrow \qquad A_v = 18,41 - 8,14 = 10,27 \text{ kN}$$

Kontrolle:

$$\sum M^{(B)} = 0: -A_v \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot \sin 45° \cdot 4 + 10 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 4$$

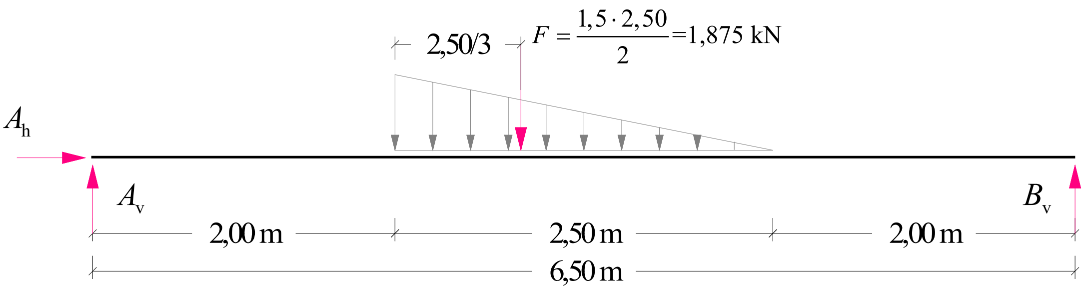
$$= -10,27 \cdot 6 + 24 + 1,41 \cdot 4 + 30 + 6 - 4 = -0,02 \approx 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Ergebnisdarstellung:



4.4 Einfeldbalken mit dreiecksförmiger Streckenlast

Schnittdarstellung:



Gleichgewichtsbedingungen:

$\sum H = 0:$ $\qquad A_h = 0$

$\sum M^{(A)} = 0: \quad -1,875 \cdot \left(2 + \frac{1}{3} \cdot 2,50\right) + B_v \cdot 6,50 = 0 \rightarrow \qquad B_v = \frac{1}{6,5} \cdot 5,312 = 0,817 \text{ kN}$

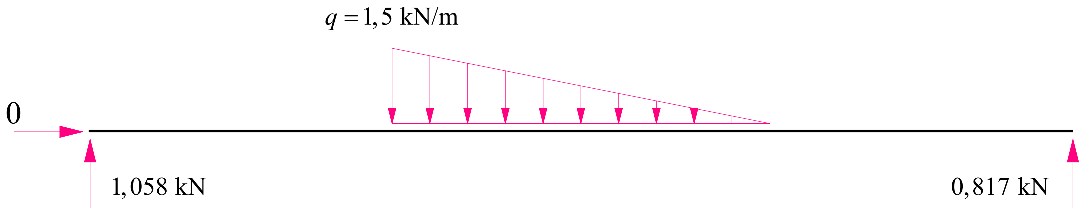
$\sum V = 0: \quad 1,875 - A_v - B_v = 0 \rightarrow \qquad A_v = 1,875 - B_v = 1,875 - 0,817 = 1,058 \text{ kN}$

Kontrolle:

$$\sum M^{(B)} = 0: \quad -A_v \cdot 6,5 + 1,875 \cdot \left(2 + \frac{2}{3} \cdot 2,50\right)$$

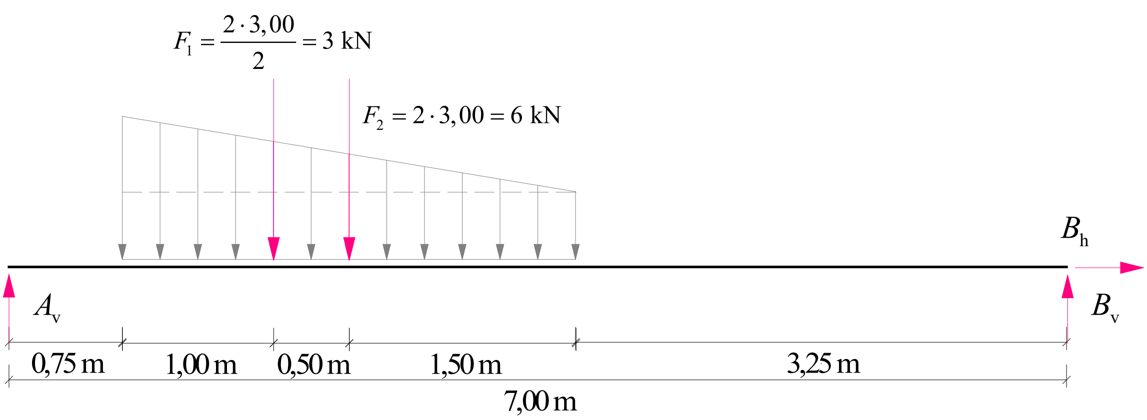
$$= -1,058 \cdot 6,5 + 1,875 \cdot 3,667 = -6,877 + 6,875 = 0,002 \approx 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Ergebnisdarstellung:



4.5 Einfeldbalken mit trapezförmiger Streckenlast

Schnittdarstellung:



Gleichgewichtsbedingungen:

$\sum H = 0:$ $\quad B_h = 0$

$\sum M^{(A)} = 0: \quad -F_1 \cdot 1{,}75 - F_2 \cdot 2{,}25 + B_v \cdot 7 = 0 \rightarrow \quad B_v = \frac{1}{7} \cdot (3 \cdot 1{,}75 + 6 \cdot 2{,}25) = 2{,}68 \text{ kN}$

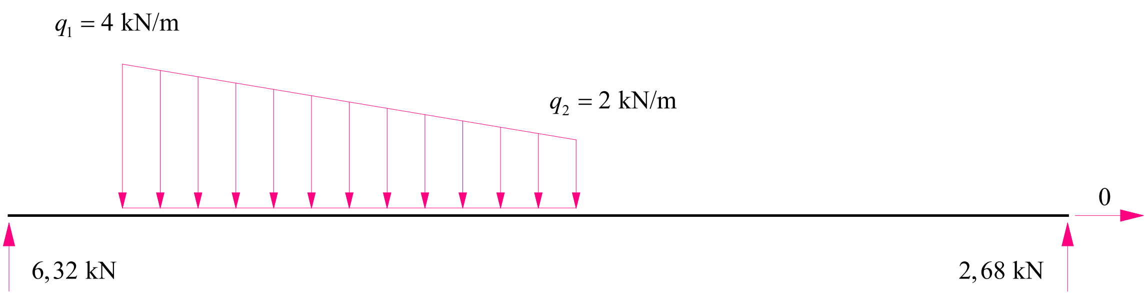
$\sum V = 0: \quad F_1 + F_2 - A_v - B_v = 0 \rightarrow \quad A_v = +3 + 6 - B_v = 9 - 2{,}68 = 6{,}32 \text{ kN}$

Kontrolle:

$\sum M^{(B)} = 0: \quad -A_v \cdot 7 + F_1 \cdot 5{,}25 + F_2 \cdot 4{,}75$

$= -6{,}32 \cdot 7 + 3 \cdot 5{,}25 + 6 \cdot 4{,}75 = -44{,}24 + 44{,}25 = 0{,}01 \approx 0 \rightarrow$ Kontrolle erfolgreich

Ergebnisdarstellung:

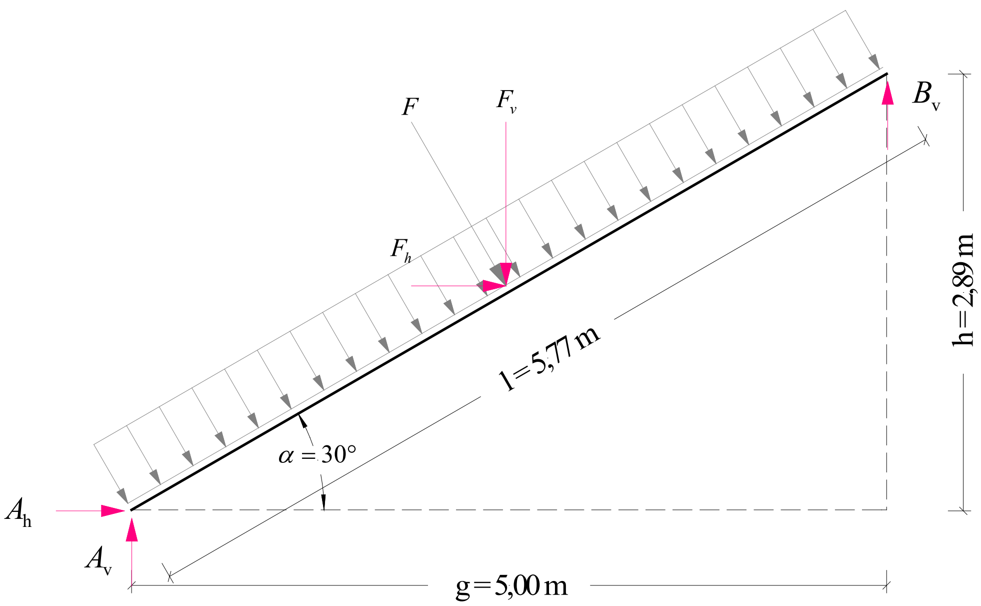


4.6 Geneigter Einfeldbalken mit Gleichstreckenlast

$h \;= g \cdot \tan\alpha = 5{,}00 \cdot \tan 30° \qquad = 2{,}89 \text{ m}$

$l \;= \frac{g}{\cos\alpha} = \frac{5{,}00}{\cos 30°} \qquad = 5{,}77 \text{ m}$

Schnittdarstellung:



Gleichgewichtsbedingungen:

$$F = \underline{q \cdot l} \qquad F = 5 \cdot 5{,}77 = 28{,}87\ \text{kN}$$

$$F_\text{v} = F \cdot \cos\alpha = q \cdot \underbrace{l \cdot \cos\alpha}_{=g} = \underline{q \cdot g} \rightarrow \qquad F_\text{v} = 5 \cdot 5{,}00 = 25{,}00\ \text{kN}$$

$$F_\text{h} = F \cdot \sin\alpha = q \cdot \underbrace{l \cdot \sin\alpha}_{=h} = \underline{q \cdot h} \rightarrow \qquad F_\text{h} = 5 \cdot 2{,}89 = 14{,}43\ \text{kN}$$

$$\sum H = 0: \quad A_\text{h} + F_\text{h} = 0 \rightarrow \qquad A_\text{h} = -F_\text{h} = -14{,}43\ \text{kN}$$

$$\sum M^{(\text{A})} = 0: \quad -F \cdot \frac{5{,}77}{2} + B_\text{v} \cdot 5 = 0 \rightarrow \qquad B_\text{v} = \frac{1}{5} \cdot 28{,}87 \cdot \frac{5{,}77}{2} = 16{,}67\ \text{kN}$$

alternativ:

$$\sum M^{(\text{A})} = 0: \quad -F_\text{h} \cdot \frac{2{,}89}{2} - F_\text{v} \cdot \frac{5}{2} + B_\text{v} \cdot 5 = 0 \rightarrow \qquad B_\text{v} = \frac{1}{5} \cdot \left(14{,}43 \cdot \frac{2{,}89}{2} + 25 \cdot 2{,}5\right) = 16{,}67\ \text{kN}$$

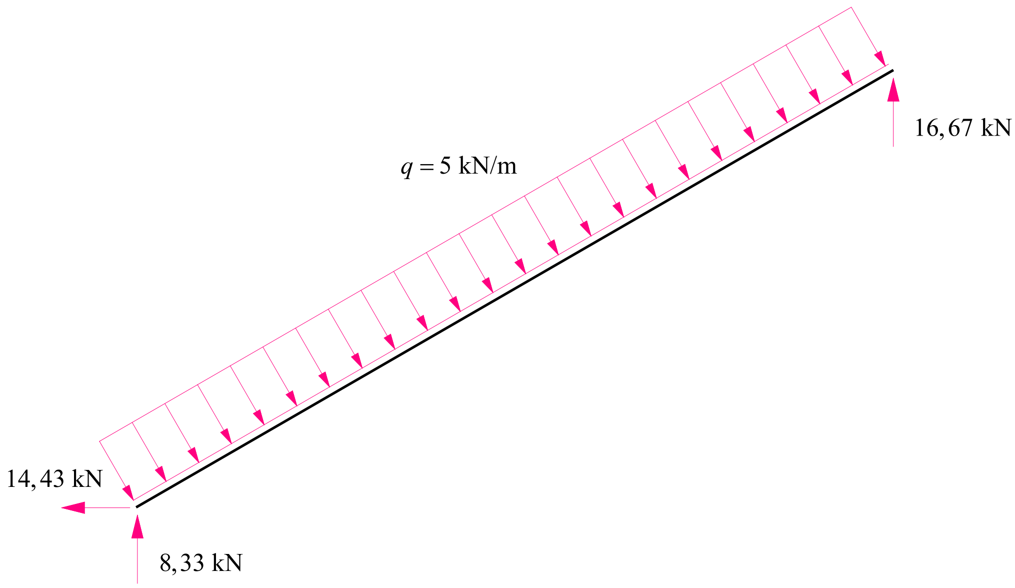
$$\sum V = 0: \quad -A_\text{v} + F_\text{v} - B_\text{v} = 0 \rightarrow \qquad A_\text{v} = 25 - 16{,}67 = 8{,}33\ \text{kN}$$

<u>Kontrolle:</u>

$$\sum M^{(\text{B})} = 0: \quad A_\text{h} \cdot \frac{2{,}89}{2} - A_\text{v} \cdot 5 + F \cdot \frac{5{,}77}{2} = -14{,}43 \cdot 2{,}89 - 8{,}33 \cdot 5 + 28{,}87 \cdot \frac{5{,}77}{2}$$

$$= -0{,}06 \approx 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Ergebnisdarstellung:

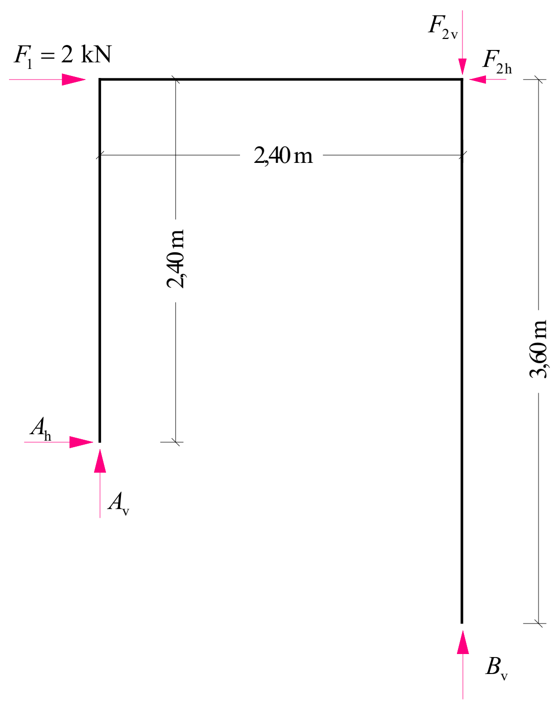


4.7 Rechteckrahmen mit zwei Einzellasten

Schnittdarstellung:

$F_{2h} = 3{,}5 \cdot \cos 60° = 1{,}75 \text{ kN}$

$F_{2v} = 3{,}5 \cdot \sin 60° = 3{,}03 \text{ kN}$



Gleichgewichtsbedingungen:

$\sum H = 0:$

$0 = A_h + F_1 - F_{2h}$

$A_h = -F_1 + F_{2h} = -2 + 1{,}75 = -0{,}25 \text{ kN}$

$\sum M^{(A)} = 0:$

$0 = B_v \cdot 2{,}4 - F_1 \cdot 2{,}4 - F_v \cdot 2{,}4 + F_h \cdot 2{,}4$

$B_v = F_1 + F_{2v} - F_{2h} = 2 + 3{,}03 - 1{,}75 = 3{,}28 \text{ kN}$

$\sum V = 0:$

$0 = -A_v + F_{2v} - B_v$

$A_v = +F_{2v} - B_v = 3{,}03 - 3{,}28 = -0{,}25 \text{ kN}$

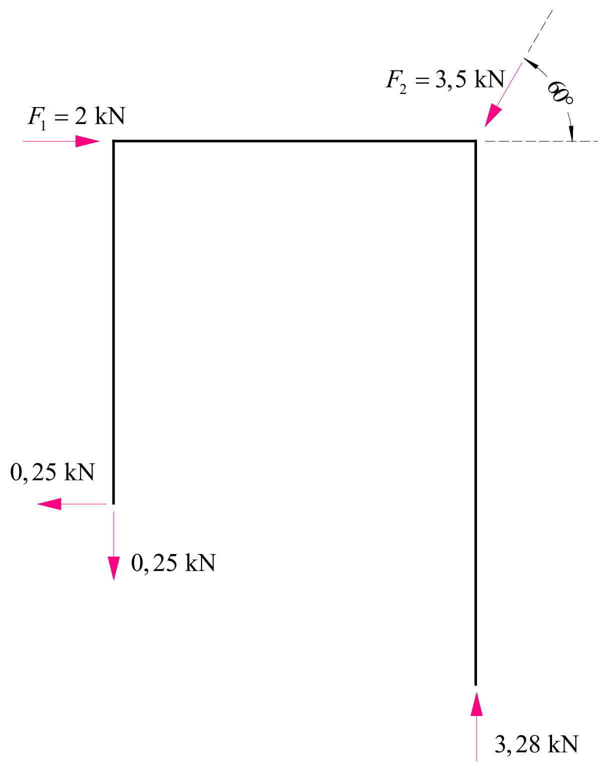
Kontrolle $\sum M^{(B)} = 0$:

$-A_v \cdot 2{,}4 - A_h \cdot 1{,}2 - 2 \cdot 3{,}6 + F_h \cdot 3{,}6 = 0\ ?$

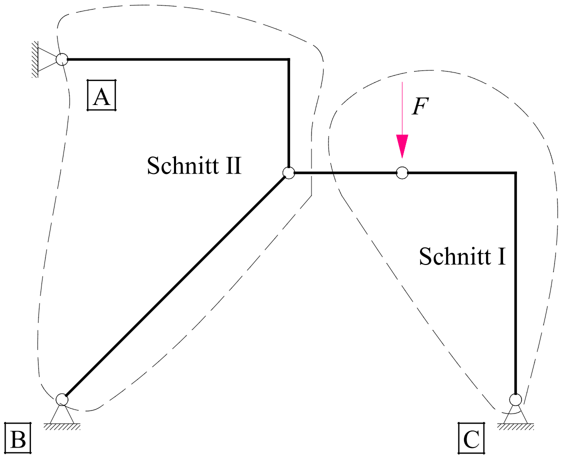
$-(-0{,}25) \cdot 2{,}4 - (-0{,}25) \cdot 1{,}2 - 7{,}2 + 1{,}75 \cdot 3{,}6 = 0$

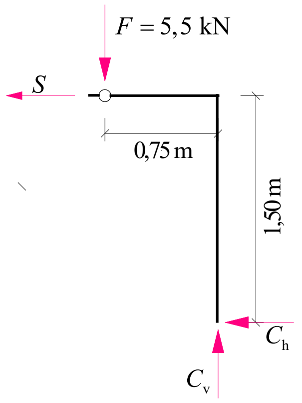
$\rightarrow$ Kontrolle erfolgreich

Ergebnisdarstellung:



4.8 Rahmentragwerk mit einer Einzellast





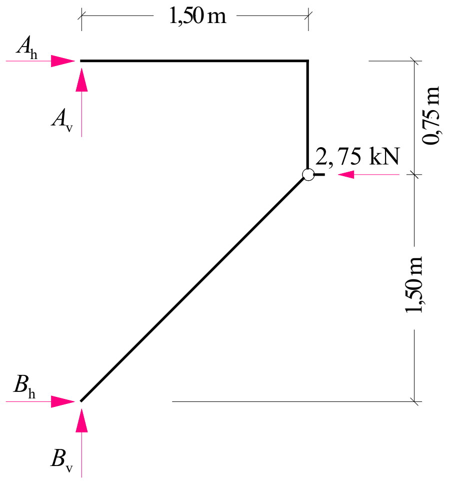
$$\sum M^{(C)} = 0: S \cdot 1,5 + F \cdot 0,75 = 0 \rightarrow S = -0,5 \cdot F = -0,5 \cdot 5,5 = -2,75 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0: -S - C_h = 0 \rightarrow C_h = -S = 2,75 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: F - C_v = 0 \rightarrow C_v = F = 5,5 \text{ kN}$$

Kontrolle: zeigt die Resultierende aus C_h und C_v in Richtung des geknickten Pendelstabes?

$$\frac{C_h}{C_v} = \frac{0,75}{1,5} = 0,5 \text{ ?} \qquad \frac{2,75}{5,5} = 0,5 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$



$$\sum M^{(A)} = 0:$$

$$-2,75 \cdot 0,75 + B_h \cdot 2,25 = 0 \rightarrow B_h = \frac{2,75}{3} = 0,917 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0: A_h - 2,75 + B_h = 0 \rightarrow A_h = 2,75 - B_h$$

$$A_h = 2,75 - \frac{2,75}{3} = \frac{2}{3} \cdot 2,75 = 1,833 \text{ kN}$$

Resultierende aus B_h und B_v in Richtung gerader Pendelstab:

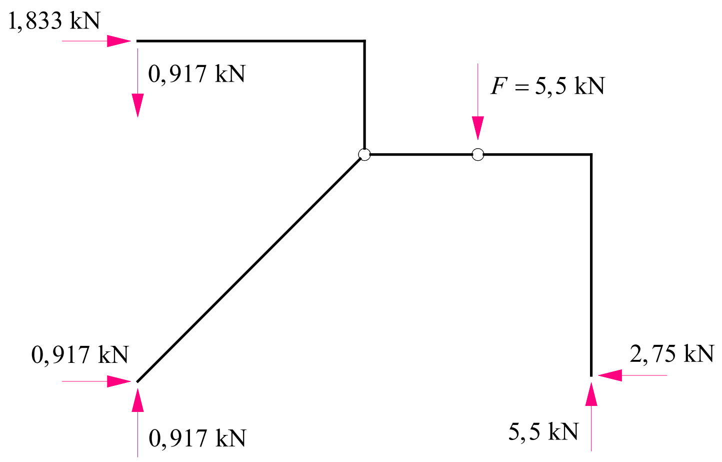
$$B_v = B_h = 0,917 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: -A_v - B_v = 0 \rightarrow A_v = -B_v = -0,917 \text{ kN}$$

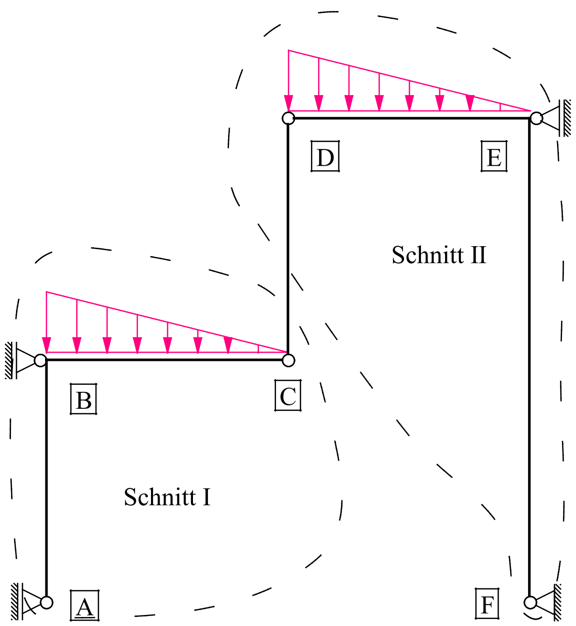
Kontrolle: Resultierende aus A_h und A_v in Richtung des geknickten Pendelstabes?

$$\frac{A_h}{-A_v} = \frac{1,5}{0,75} = 2 \text{ ?} \qquad \frac{1,833}{0,917} = 2 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

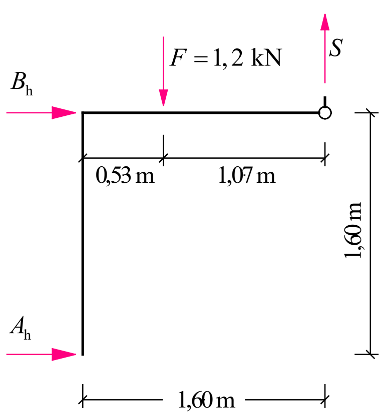
Ergebnisdarstellung:



4.9 Rahmentragwerk mit dreiecksförmigen Streckenlasten



Schnitt I



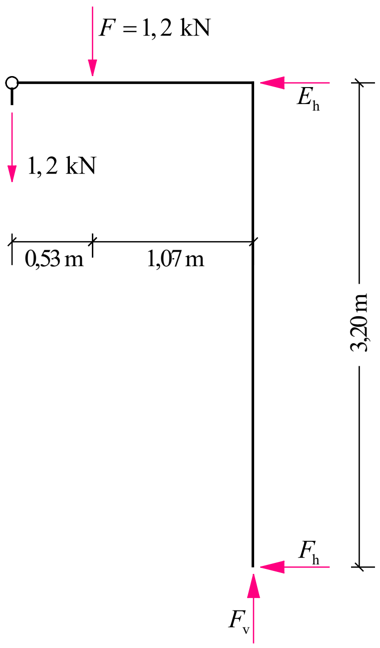
$$\sum V = 0: F - S = 0 \rightarrow S = F = 1{,}2 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(B)} = 0:$$

$$+A_h \cdot 1{,}6 - F \cdot \frac{1{,}6}{3} + S \cdot 1{,}6 = 0 \rightarrow A_h = +\frac{F}{3} - F = -\frac{2}{3}F = -0{,}8 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0: A_h + B_h = 0 \rightarrow B_h = -A_h = +0{,}8 \text{ kN}$$

Schnitt II



$$\sum V = 0: 1,2 + 1,2 - F_v = 0 \rightarrow F_v = 2,4 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(F)} = 0: 1,2 \cdot 1,6 + 1,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 + E_h \cdot 3,2 = 0$$

$$\rightarrow E_h = \frac{1,6}{3,2} \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \cdot 1,2 = -1,0 \text{ kN}$$

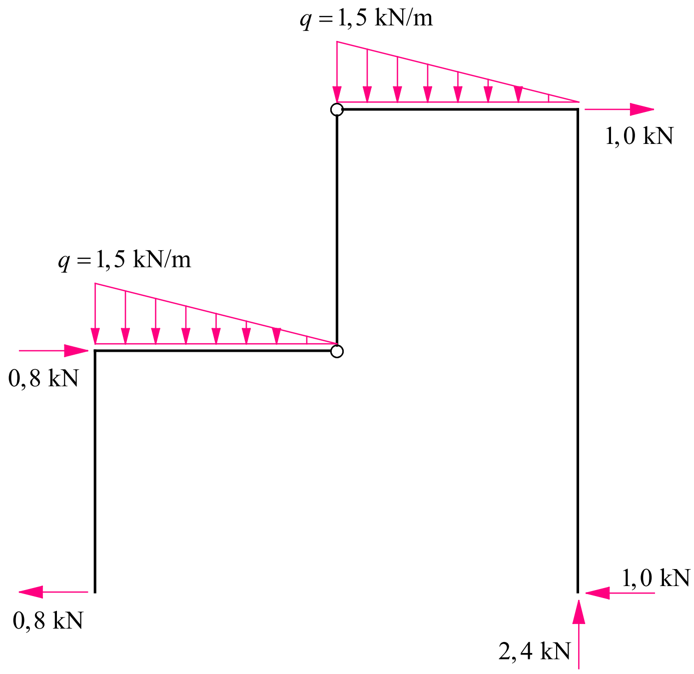
$$\sum H = 0: E_h + F_h = 0 \rightarrow F_h = -E_h = 1,0 \text{ kN}$$

Kontrolle: $\sum M^{(F)} = 0:$

$$1,2 \cdot 1,6 + 1,2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,6 - F_h \cdot 3,2 = 0 \ \ ?$$

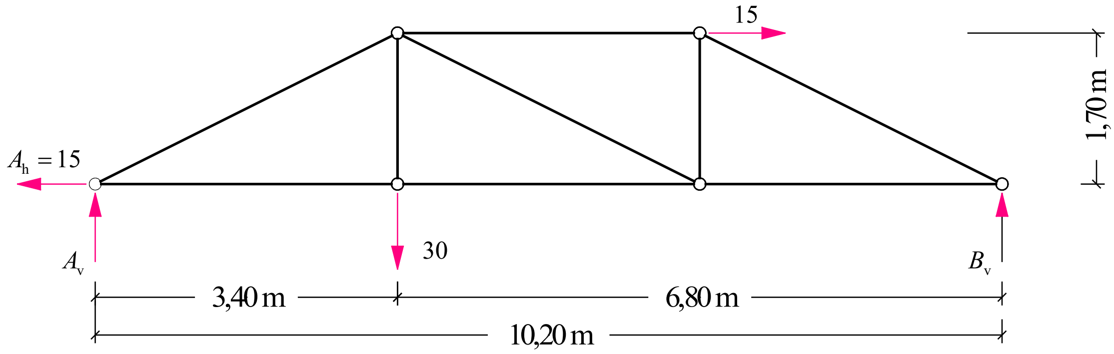
$$1,2 \cdot \frac{5}{3} \cdot 1,6 - 1,0 \cdot 3,2 = 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Ergebnisdarstellung:



5 Fachwerke Übungen

5.1 Fachwerk 1 nach Knotenpunktverfahren



$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -30 \cdot 3,4 - 15 \cdot 1,7 + B_v \cdot 10,2 = 0 \rightarrow \qquad B_v = 12,5 \text{ kN}$$

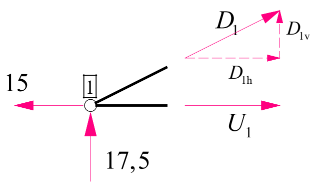
$$\sum V = 0: \quad -A_v + 30 - 12,5 = 0 \rightarrow \qquad A_v = 17,5 \text{ kN}$$

<u>Kontrolle</u>

$$\sum M^{(B)} = 0: \quad \underbrace{-17,5 \cdot 10,2 + 30 \cdot 6,8 - 15 \cdot 1,7}_{=0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Knotengleichgewichte:

Knoten 1



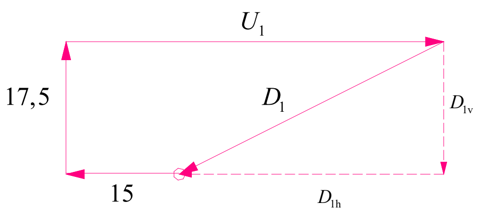
$$\sum V = 0: \quad -17,5 - D_{1v} = 0 \rightarrow \qquad D_{1v} = -17,5$$

$$\text{Geometrie: } \frac{D_{1h}}{D_{1v}} = \frac{3,40}{1,70} = \frac{2}{1} \rightarrow \qquad D_{1h} = 2 \cdot D_{1v} = -35$$

$$D_1 = -\sqrt{(17,5)^2 + (35)^2} = -39,13$$

$$\sum H = 0: \quad -15 + U_1 + \underbrace{D_{1h}}_{-35} = 0 \rightarrow \quad U_1 = +50,0$$

Alternative Lösung durch Vektorgrafik (hier exemplarisch):



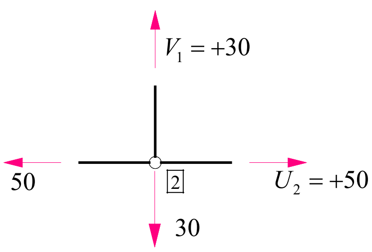
$$D_{1v} = -17,5$$

$$\frac{D_{1h}}{D_{1v}} = \frac{3,40}{1,70} \rightarrow D_{1h} = 2 \cdot D_{1v} = -35$$

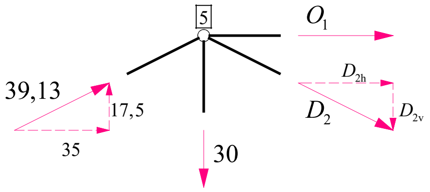
$$D_1 = -\sqrt{(17,5)^2 + (35)^2} = -39,13$$

$$U_1 = 15 + |D_{1h}| = 15 + 35 = +50$$

Knoten 2



Knoten 5



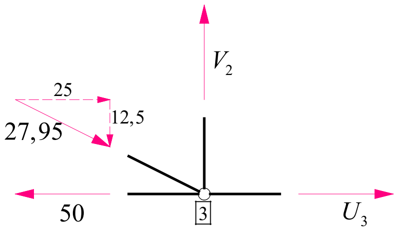
$$\sum V = 0: \quad -17{,}5 + 30 + D_{2v} = 0 \rightarrow \qquad D_{2v} = -12{,}5$$

$$\text{Geometrie:} \quad \frac{D_{2h}}{D_{2v}} = \frac{2}{1} \rightarrow \qquad D_{2h} = -25$$

$$D_2 = -\sqrt{(12{,}5)^2 + (25)^2} = -27{,}95$$

$$\sum H = 0: \quad +35 + O_1 + \underbrace{D_{2h}}_{-25} = 0 \rightarrow \qquad O_1 = -10$$

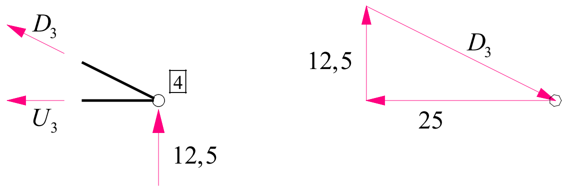
Knoten 3:



$$\sum H = 0: \quad -50 + 25 + U_3 = 0 \rightarrow \qquad U_3 = +25{,}0$$

$$V_2 = +12{,}5$$

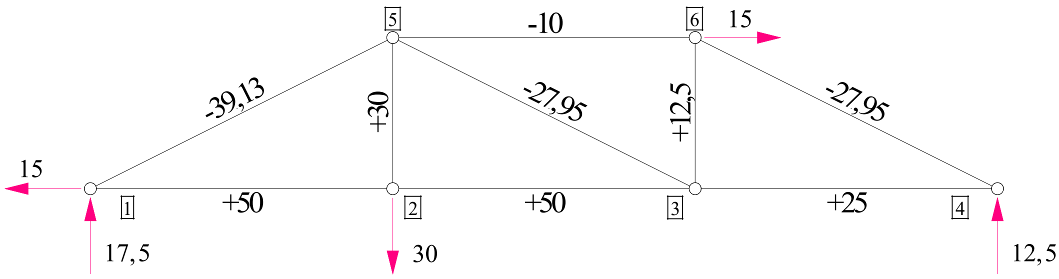
Knoten 4:



$$D_3 = -\sqrt{(12{,}5)^2 + (25)^2} = -27{,}95$$

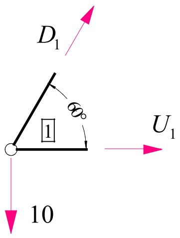
als erfolgreiche Kontrolle dient hier auch die Tatsache, dass $\frac{D_{3h}}{D_{3v}} = \frac{2}{1}$ ist!

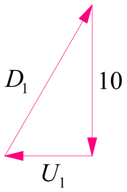
Ergebnisdarstellung:



5.2 Fachwerk 2 nach Knotenpunktverfahren

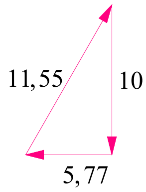
Knoten 1:



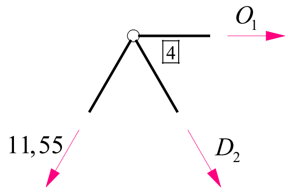


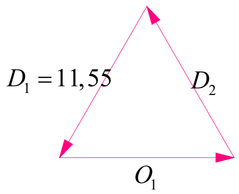
$$\frac{10}{|U_1|} = \tan 60° \to U_1 = -\frac{10}{\tan 60°} = -5,77$$

$$\frac{10}{|D_1|} = \sin 60° \to D_1 = +\frac{10}{\sin 60°} = +11,55$$



Knoten 4:



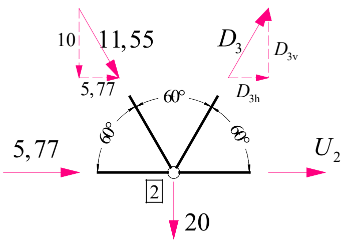


gleichseitiges Dreieck:

$$|D_2| = |D_1| = 11,55 \to \quad D_2 = -11,55$$

$$|O_1| = |D_1| = 11,55 \to \quad O_1 = +11,55$$

Knoten 2:



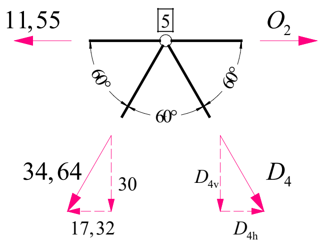
$$\sum V = 0: \quad +10 + 20 - D_{3v} = 0 \to \quad D_{3v} = +30$$

$$\text{Geometrie:} \quad \frac{D_{3v}}{D_{3h}} = \tan 60° \to D_{3h} = \frac{30}{\tan 60°} = +17,32$$

$$D_3 = +\sqrt{30^2 + 17,32^2} = +34,64$$

$$\sum H = 0: \quad +5,77 + 5,77 + \underbrace{D_{3h}}_{+17,32} + U_2 = 0 \to U_2 = -28,86$$

Knoten 5:



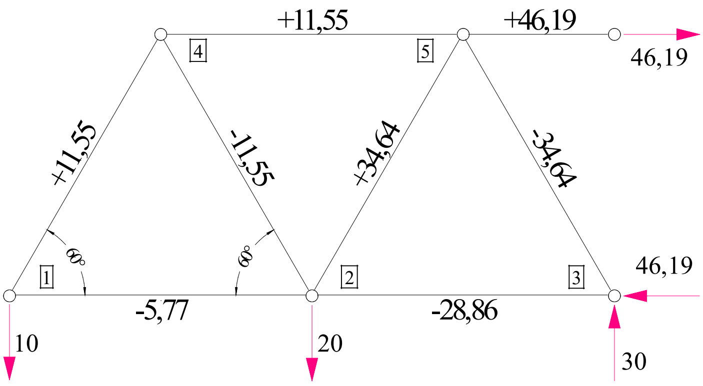
$$\sum V = 0: \quad D_{4v} = -30$$

$$\text{Geometrie:} \quad \frac{D_{4h}}{D_{4v}} = \tan 30° \to D_{4h} = -30 \cdot \tan 30° = -17,32$$

$$D_4 = +\sqrt{30^2 + 17,32^2} = -34,64$$

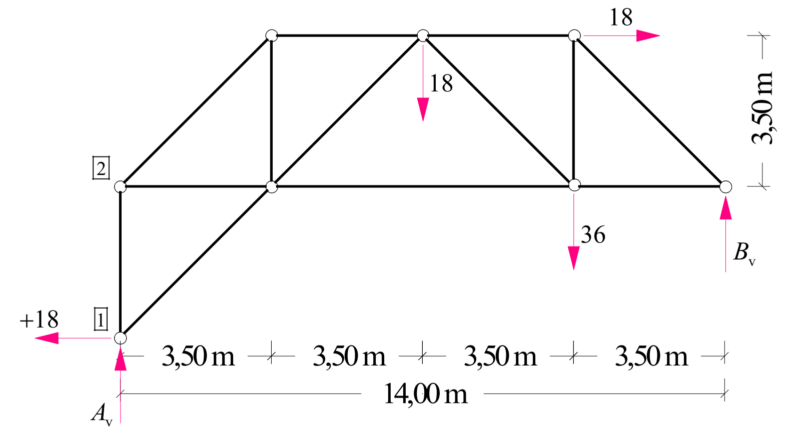
$$\sum H = 0: \quad -11,55 - 17,32 + \underbrace{D_{4h}}_{-17,32} + O_2 = 0 \to O_2 = +46,19$$

Ergebnisdarstellung:



5.3 Fachwerk 3 nach Knotenpunktverfahren

Auflagerkräfte:



$$\sum H = 0: \quad \rightarrow \qquad A_h = 18 \text{ kN}$$

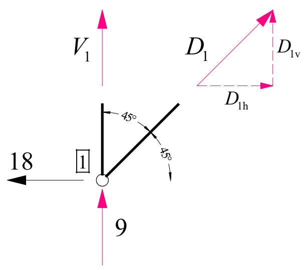
$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -18 \cdot 7 - 36 \cdot 10,5 - 18 \cdot 7 + B_v \cdot 14 = 0 \rightarrow \qquad B_v = 45 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad -A_v + 18 + 36 - 45 = 0 \rightarrow \qquad A_v = 9 \text{ kN}$$

<u>Kontrolle</u>

$$\sum M^{(B)} = 0: \quad \underbrace{-18 \cdot 3,5 - 9 \cdot 14 + 18 \cdot 7 + 36 \cdot 3,5 - 18 \cdot 3,5}_{=0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Knoten 1:

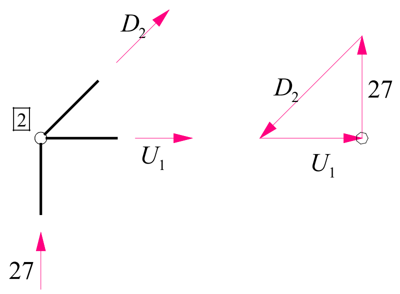


$$\sum H = 0: \quad \rightarrow \quad D_{1h} = 18$$

$$D_{1v} = 18 \rightarrow D_1 = +18 \cdot \sqrt{2} = +25,46$$

$$\sum V = 0: \quad -9 - V_1 - \underbrace{D_{1v}}_{+18} = 0 \rightarrow V_1 = -27$$

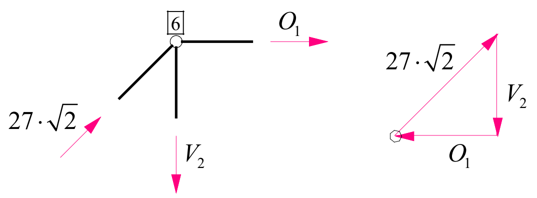
Knoten 2:



$$U_1 = +27$$

$$D_2 = -27 \cdot \sqrt{2} = -38,18$$

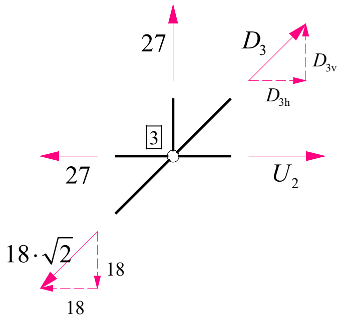
Knoten 6:



$$O_1 = -27$$

$$V_2 = +27$$

Knoten 3:

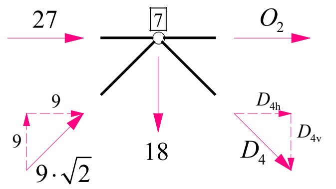


$$\sum V = 0: \quad 18 - 27 - D_{3v} = 0 \rightarrow D_{3v} = -9$$

$$D_{3h} = -9 \rightarrow D_3 = -9\cdot\sqrt{2} = -12,73$$

$$\sum H = 0: \quad -27 - 18 + \underbrace{D_{3h}}_{-9} + U_2 = 0 \rightarrow U_2 = +54$$

Knoten 7:

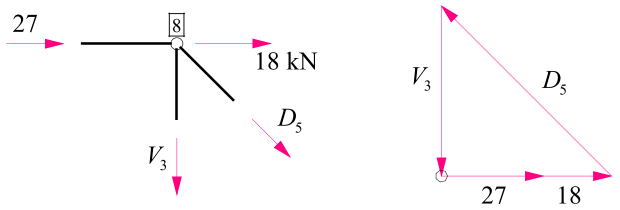


$$\sum V = 0: \quad -9 + 18 + D_{4v} = 0 \rightarrow D_{4v} = -9$$

$$D_{4h} = -9 \rightarrow D_4 = -9\cdot\sqrt{2} = -12,73$$

$$\sum H = 0: \quad 27 + 9 + O_2 + \underbrace{D_{4h}}_{-9} = 0 \rightarrow O_2 = -27$$

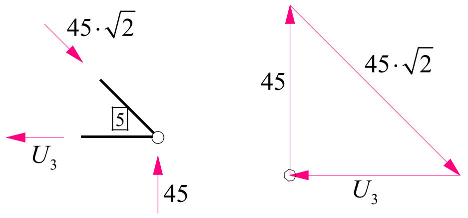
Knoten 8:



$$V_3 = 27 + 18 = +45$$

$$D_5 = -45\cdot\sqrt{2} = -63,64$$

Knoten 5:

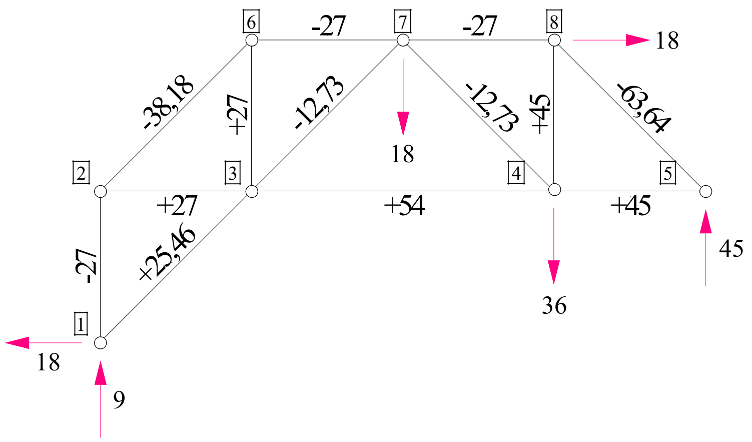


$U_3 = +45$

als erfolgreiche Kontrolle:

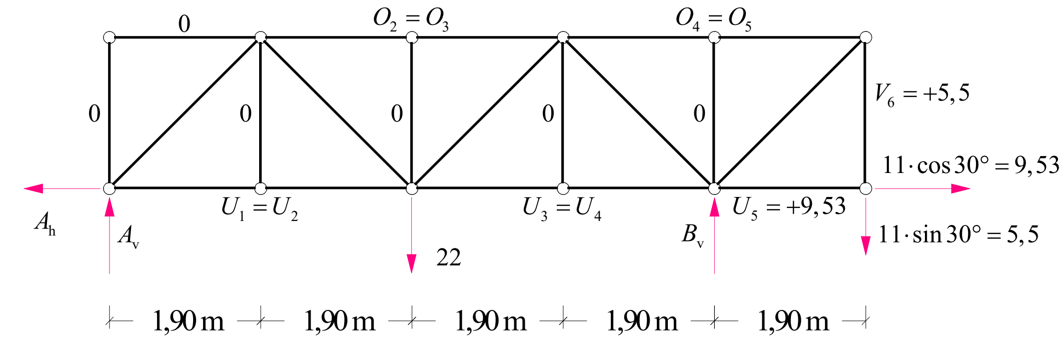
U_3 ist horizontal

Ergebnisdarstellung:



5.4 Fachwerk 4 nach Knotenpunktverfahren

Ermittlung der Auflagerkräfte, der Nullstäbe und der Stäbe mit gleicher Normalkraft:



$$\sum H = 0: \quad \rightarrow \qquad A_h = 11 \cdot \cos 30° = 9,53 \text{ kN}$$

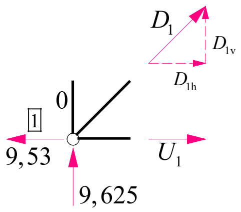
$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -22 \cdot 3,8 + B_v \cdot 7,6 - 5,5 \cdot 9,5 = 0 \rightarrow \qquad B_v = 17,875 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad -A_v + 22 - 17,875 + 5,5 = 0 \rightarrow \qquad A_v = 9,625 \text{ kN}$$

<u>Kontrolle</u>

$$\sum M^{(B)} = 0: \quad \underbrace{-9,625 \cdot 7,6 + 22 \cdot 3,8 - 5,5 \cdot 1,9}_{=0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Knoten 1:

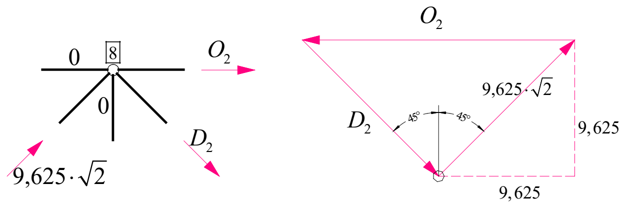


$$\sum V = 0: \quad -9,625 - D_{1v} = 0 \rightarrow D_{1v} = -9,625$$

$$D_{1h} = -9,625 \rightarrow D_1 = -9,625 \cdot \sqrt{2} = -13,61$$

$$\sum H = 0: \quad -9,53 + \underbrace{D_{1h}}_{-9,625} + U_1 = 0 \rightarrow U_1 = +19,16$$

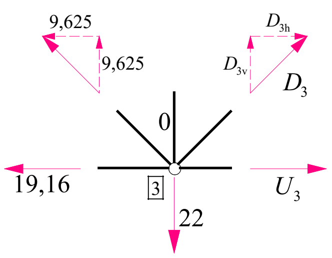
Knoten 8:



$$|D_2| = |D_1| \rightarrow D_2 = +9,625 \cdot \sqrt{2}$$

$$O_2 = -2 \cdot 9,625 = -19,25$$

Knoten 3:



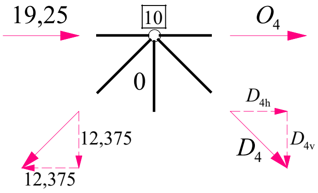
$$\sum V = 0: \quad -9,625 + 22 - D_{3v} = 0$$

$$D_{3h} = +12,375 \rightarrow D_3 = +12,375 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sum H = 0: \quad -19,16 - 9,625 + \underbrace{D_{3h}}_{+12,375} + U_3 = 0$$

$$\rightarrow U_3 = 16,41$$

Knoten 10:

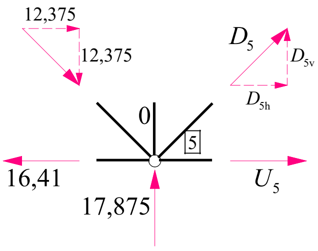


$$\sum V = 0: \quad D_{4v} = -12,375$$

$$D_{4h} = -12,375 \to D_4 = -12,375 \cdot \sqrt{2}$$

$$\sum H = 0: \quad 19,25 - 12,375 + O_4 + \underbrace{D_{4h}}_{-12,375} = 0 \to O_4 = +5,5$$

Knoten 5:

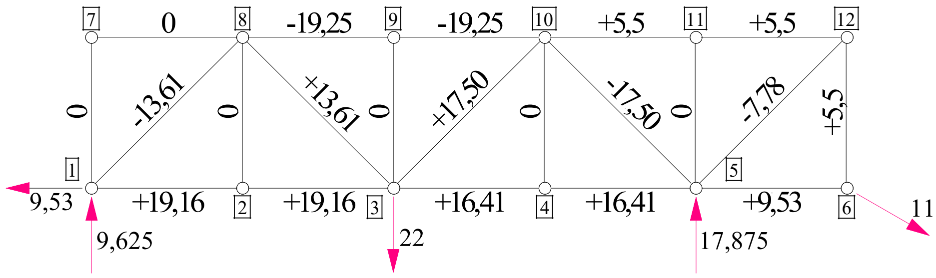


$$\sum V = 0: \quad 12,375 - 17,875 - D_{5v} \to D_{5v} = -5,5$$

$$D_{5h} = -5,5 \to D_5 = -5,5 \cdot \sqrt{2}$$

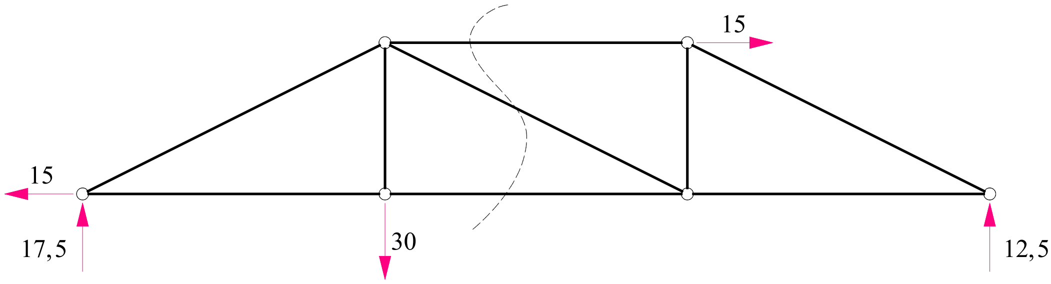
$$\sum H = 0: \quad 12,375 - 16,41 + \underbrace{D_{5h}}_{-5,5} + U_5 = 0 \to U_5 = +9,53$$

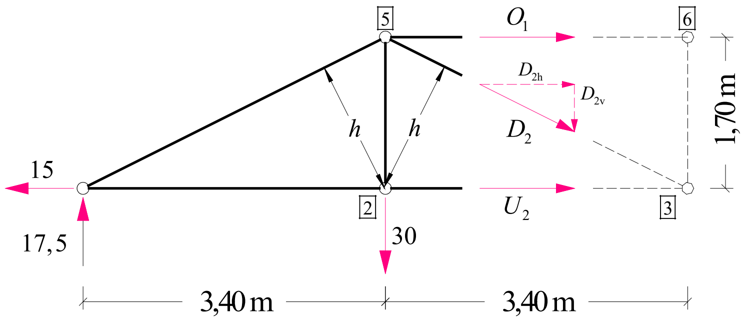
Ergebnisdarstellung:

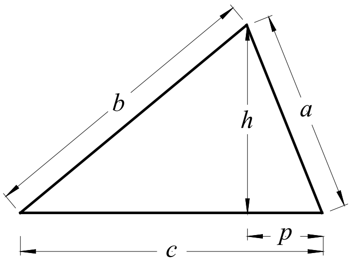


5.5 Fachwerk 1 durch Rittersches Schnittverfahren

Auflagerkräfte identisch 5.1:







allgemein:

$$p=\frac{a^2-b^2+c^2}{2c}$$

$$h=\sqrt{a^2-p^2}$$

unser Beispiel:

$$p=\frac{1,7^2-3,4^2+3,8^2}{2\cdot 3,8}=0,76\text{ m}$$

$$h=\sqrt{1,7^2-0,76^2}=1,52\text{ m}$$

$$\sum M^{(5)}:\quad -15\cdot 1,7-17,5\cdot 3,4+U_2\cdot 1,7=0\quad\rightarrow U_2=+50$$

$$\sum M^{(3)}:\quad -17,5\cdot 6,8+30\cdot 3,4-O_1\cdot 1,7=0\quad\rightarrow O_1=-10$$

$$\left.\begin{aligned}&\sum V:\quad -17,5+30+D_{2v}=0 && \rightarrow D_{2v}=-12,5\\ &\sum H:\quad -15+O_1+U_2+D_{2h}=0 &&\\ &\qquad -15-10+50+D_{2h}=0 && \rightarrow D_{2h}=-25\end{aligned}\right\}\rightarrow D_2=-\sqrt{(-12,5)^2+(-25)^2}=-27,95$$

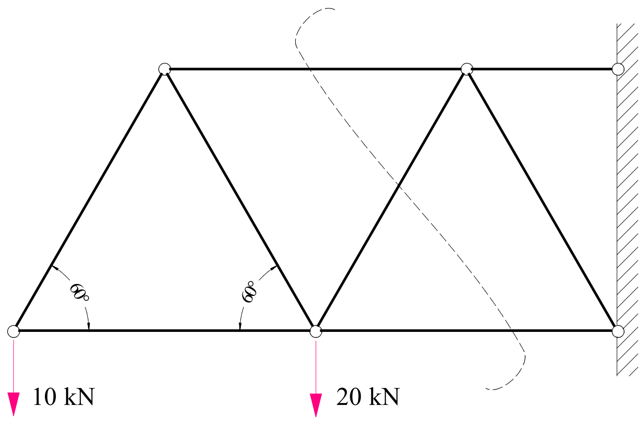
Kontrolle aus der Geometrie:

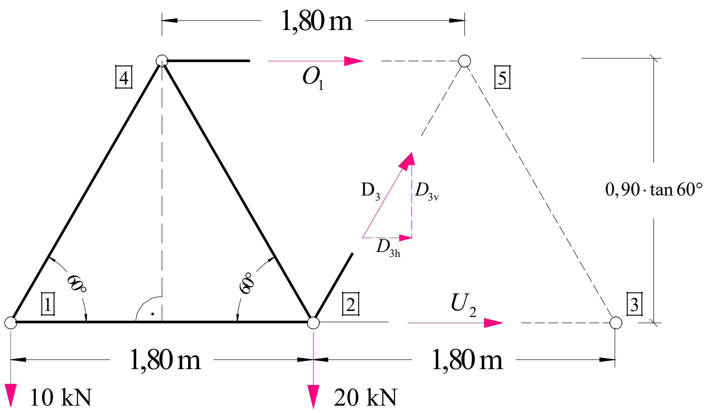
$$\frac{|D_{2h}|}{|D_{2v}|}=\frac{3,40}{1,70}=\frac{2}{1}\overset{!}{=}\frac{25}{12,5}\rightarrow\text{ Kontrolle erfolgreich}$$

oder

$$\sum M^{(2)}:\quad -17,5\cdot 3,4-\underbrace{O_1}_{-10}\cdot 1,7-D_2\cdot 1,52=\quad\rightarrow D_2=\frac{-17,5\cdot 3,4+10\cdot 1,7}{1,52}=-27,96$$

5.6 Fachwerk 2 durch Rittersches Schnittverfahren





$$\sum M^{(5)}: \quad +10\cdot 2{,}7+20\cdot 0{,}9+U_2\cdot\left(0{,}9\cdot\tan 60°\right)=0 \quad \rightarrow U_2 \quad =-28{,}87$$

$$\sum M^{(2)}: \quad +10\cdot 1{,}8-O_1\cdot\left(0{,}9\cdot\tan 60°\right)=0 \quad \rightarrow O_1 \quad =+11{,}55$$

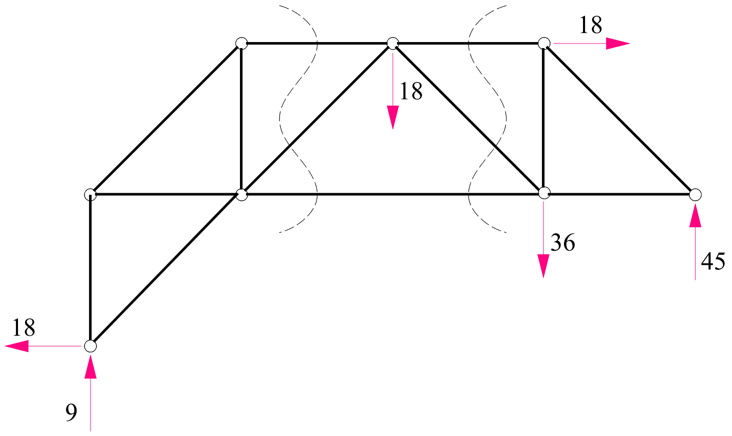
$$\left.\begin{array}{lll} \sum V: & +10+20-D_{3\mathrm{v}}=0 & \rightarrow D_{3\mathrm{v}} \;=+30 \\ \sum H: & O_1+U_2+D_{3\mathrm{h}}=0 & \\ & 11{,}55-28{,}87+D_{3\mathrm{h}}=0 & \rightarrow D_{3\mathrm{h}} \;=+17{,}32 \end{array}\right\} \rightarrow D_3=+\sqrt{30^2+17{,}32^2}=+34{,}64$$

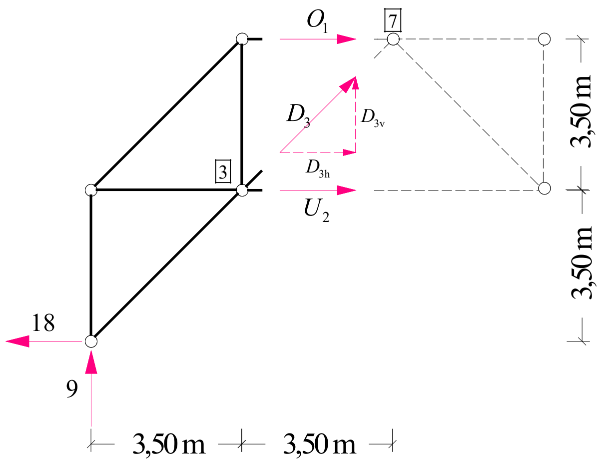
Kontrolle aus der Geometrie:

$$\frac{|D_{3\mathrm{v}}|}{|D_{3\mathrm{h}}|}=\frac{30}{17{,}32}=1{,}732\overset{!}{=}\tan 60°=1{,}732\rightarrow \text{ Kontrolle erfolgreich}$$

5.7 Fachwerk 3 durch Ritterschesches Schnittverfahren

Auflagerkräfte identisch 5.3:





$$\sum M^{(7)}: -18\cdot 7-9\cdot 7+U_2\cdot 3{,}5=0\rightarrow U_2=+54$$

$$\sum M^{(3)}: -18\cdot 3{,}5-9\cdot 3{,}5-O_1\cdot 3{,}5=0$$

$$\rightarrow O_1=-27$$

$$\sum V: \quad -9-D_{3\mathrm{v}}=0\rightarrow D_{3\mathrm{v}}=-9$$

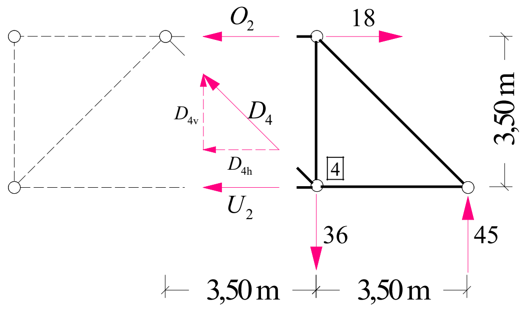
$$\sum H: \quad -18+O_1+U_1+D_{3\mathrm{h}}=0$$

$$-18-27+54+D_{3\mathrm{h}}=0\rightarrow D_{3\mathrm{h}}=-9$$

$$\rightarrow D_3=-9\cdot\sqrt{2}$$

Kontrolle aus der Geometrie:

$$\frac{|D_{3\mathrm{h}}|}{|D_{3\mathrm{v}}|}=\frac{3{,}50}{3{,}50}=1\overset{!}{=}\frac{9}{9}\rightarrow \text{ Kontrolle erfolgreich}$$



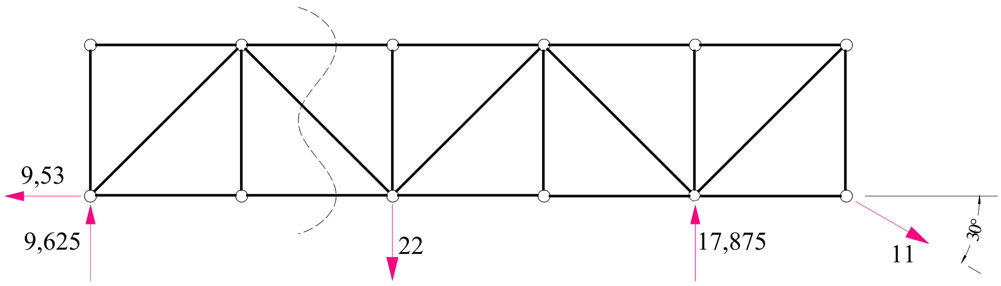
$$\sum M^{(4)}: O_2 \cdot 3{,}5 - 18 \cdot 3{,}5 + 45 \cdot 3{,}5 = 0 \rightarrow O_2 = -27$$
$$\sum V: \quad -D_{4v} + 36 - 45 = 0 \rightarrow D_{4v} = -9$$
$$\sum H: \quad +18 - O_2 - U_2 - D_{4h} = 0$$
$$+18 + 27 - 54 - D_{4h} = 0 \rightarrow D_{4h} = -9$$
$$\rightarrow D_4 = -9 \cdot \sqrt{2}$$

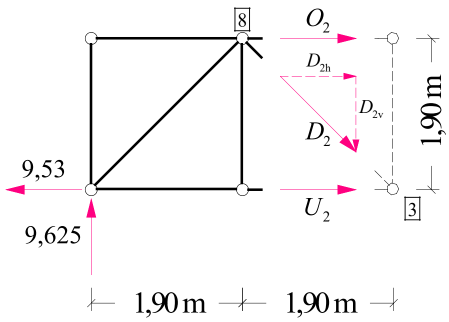
Kontrolle aus der Geometrie:

$$\frac{|D_{4h}|}{|D_{4v}|} = \frac{3{,}50}{3{,}50} = 1 \overset{!}{=} \frac{9}{9} \rightarrow \text{ Kontrolle erfolgreich}$$

5.8 Fachwerk 4 durch Rittersches Schnittverfahren

Auflagerkräfte identisch 5.4:





$$\sum M^{(8)}: -9{,}53 \cdot 1{,}9 - 9{,}625 \cdot 1{,}9 + U_2 \cdot 1{,}9 = 0 \qquad \rightarrow U_2 = +19{,}16$$
$$\sum M^{(3)}: -9{,}625 \cdot 3{,}8 - O_2 \cdot 1{,}9 = 0 \qquad \rightarrow O_2 = -19{,}25$$
$$\sum V: \quad -9{,}625 + D_{2v} = 0 \qquad \rightarrow D_{2v} = +9{,}625$$
$$\sum H: \quad -9{,}53 + O_2 + U_2 + D_{2h} = 0$$
$$-9{,}53 - 19{,}25 + 19{,}16 + D_{2h} = 0 \qquad \rightarrow D_{2h} = +9{,}625$$
$$\rightarrow D_2 = +9{,}625 \cdot \sqrt{2}$$

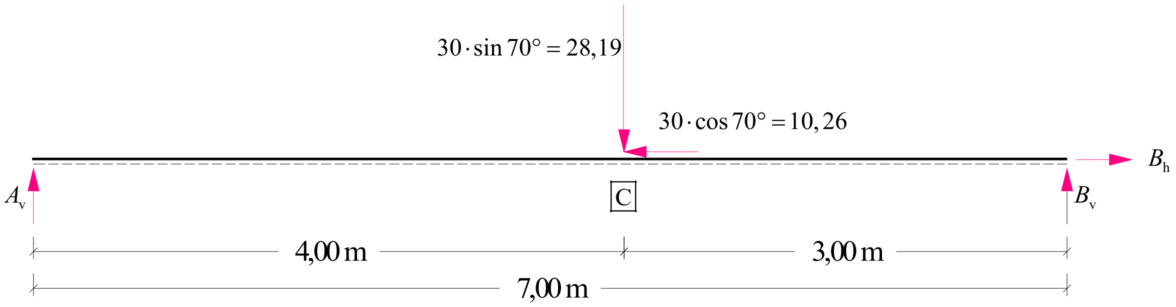
Kontrolle aus der Geometrie:

$$\frac{|D_{2h}|}{|D_{1v}|} = \frac{1{,}90}{1{,}90} = 1 \overset{!}{=} \frac{9{,}625}{9{,}625} \rightarrow \text{ Kontrolle erfolgreich}$$

6 Schnittgrößen Übungen

6.1 Einfeldbalken mit Einzellast

Auflagerkräfte:



$\sum H = 0: \quad \rightarrow \qquad B_h = 10,26$ kN

$\sum M^{(A)} = 0: \quad -28,19 \cdot 4 + B_v \cdot 7 = 0 \rightarrow \qquad B_v = 16,11$ kN

$\sum V = 0: \quad -A_v + 28,19 - 16,11 = 0 \rightarrow \qquad A_v = 12,08$ kN

Kontrolle

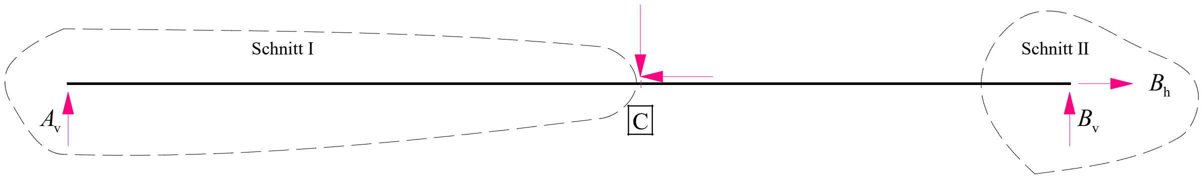
$\sum M^{(B)} = 0: \quad \underbrace{-12,08 \cdot 7 + 28,19 \cdot 3}_{=-0,01 \approx 0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow$ Kontrolle erfolgreich

Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N, Q* und *M* aussehen?

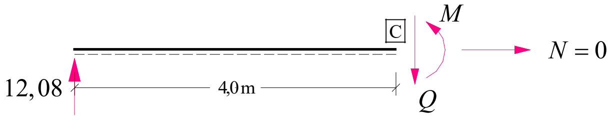
Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant bzw. $= 0$

Last	$Q(x)$	$M(x)$
$q = 0$	$Q =$ konstant	$M =$ lineare Funktion
Einzellast F bei C	Sprung um $-F$	Knick

Schnitte:



Schnitt I:

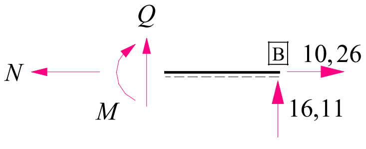


$\sum M^{(C)} = 0: \quad -12,08 \cdot 4 + M = 0$

$\rightarrow \quad M = +48,32$ kNm

$\sum V = 0: \quad \rightarrow \quad Q = +12,08$ kN

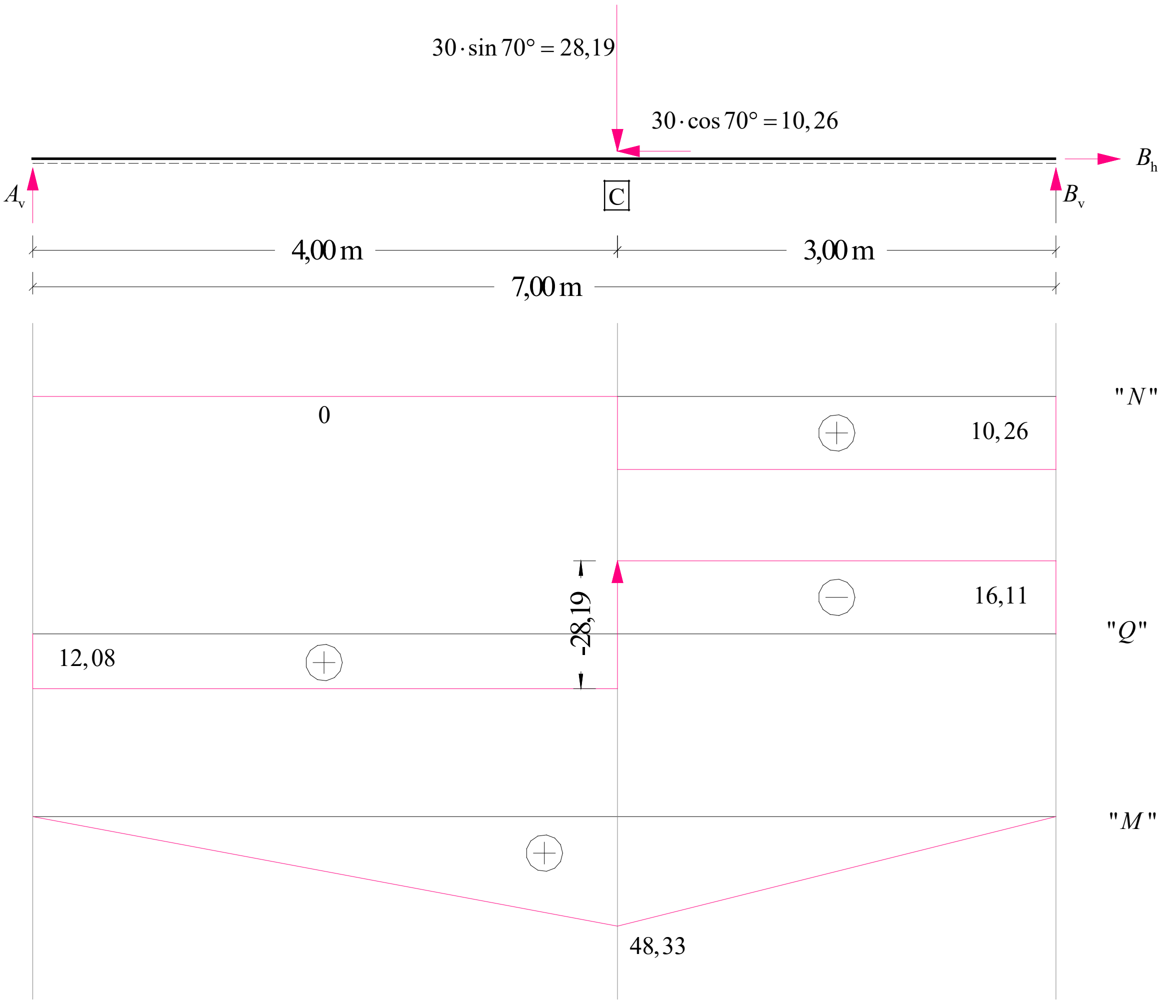
Schnitt II:



$\sum H = 0: \quad \rightarrow \quad N = +10,26$ kN

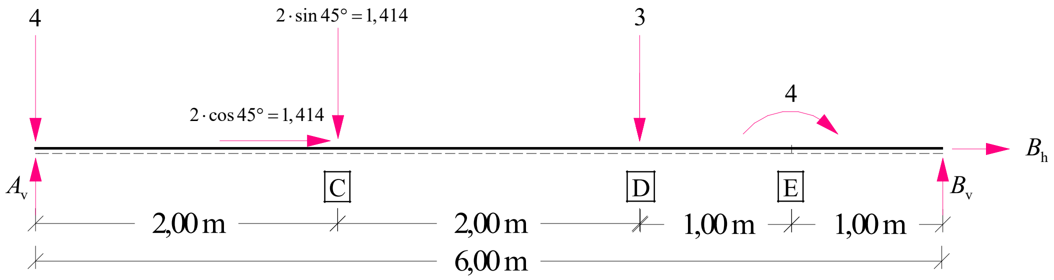
$\sum V = 0: \quad \rightarrow \quad Q = -16,11$ kN

Verlauf der Schnittgrößen



6.2 Einfeldbalken mit Einzellasten und Einzelmoment

Auflagerkräfte:



$$\sum H = 0: \quad \rightarrow \quad B_h = -1,414 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -1,414 \cdot 2 - 3 \cdot 4 - 4 + B_v \cdot 6 = 0 \rightarrow \quad B_v = 3,138 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad -A_v + 4 + 1,414 + 3 - 3,138 = 0 \rightarrow \quad A_v = 5,276 \text{ kN}$$

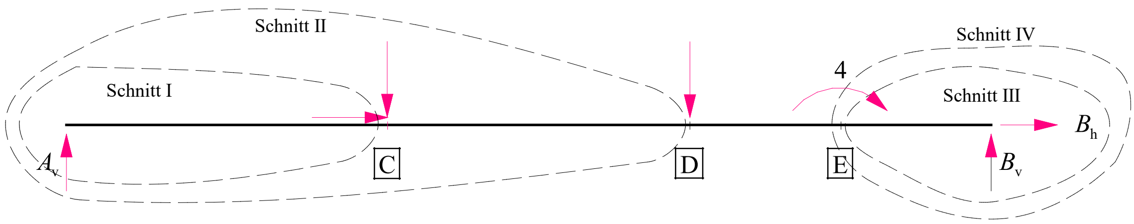
$$\underline{\text{Kontrolle}}: \sum M^{(B)} = 0: \underbrace{-5,276 \cdot 6 + 4 \cdot 6 + 1,414 \cdot 4 + 3 \cdot 2 - 4}_{\approx 0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

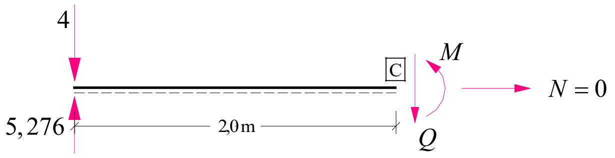
Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant bzw. $= 0$

Last	$Q(x)$	$M(x)$
$q = 0$	$Q =$ konstant	$M =$ lineare Funktion
Einzellast F_2 bei C	Sprung um $-F_2$	Knick
Einzellast F_3 bei D	Sprung um $-F_3$	Knick
Einzelmoment M bei E	$Q =$ konstant	Sprung um $+M$

Schnitte:

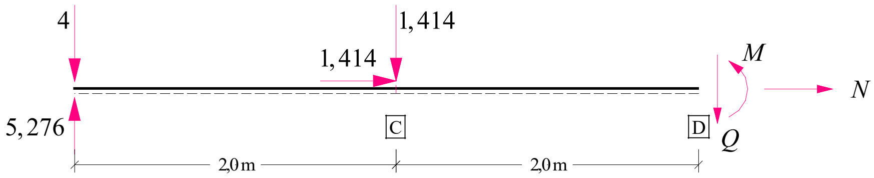


Schnitt I:



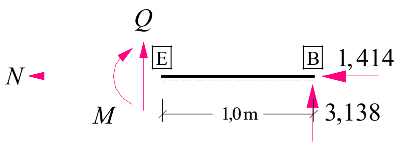
$$\sum M^{(C)} = 0: \quad -5,276 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + M = 0$$
$$\rightarrow M = +2,552 \text{ kNm}$$
$$\sum V = 0: \quad -5,276 + 4 + Q = 0$$
$$\rightarrow Q = +1,276 \text{ kN}$$

Schnitt II:



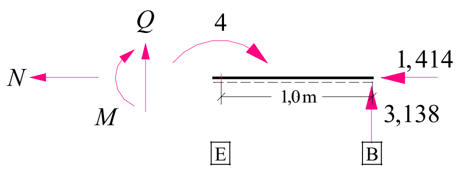
$$\sum H = 0: \quad \rightarrow \quad N = -1,414 \text{ kN}$$
$$\sum V = 0: \quad -5,276 + 4 + 1,414 + Q = 0 \rightarrow \quad Q = -0,138 \text{ kN}$$
$$\sum M^{(D)} = 0: \quad -5,276 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 1,412 \cdot 2 + M = 0 \rightarrow M = +2,276 \text{ kNm}$$

Schnitt III:



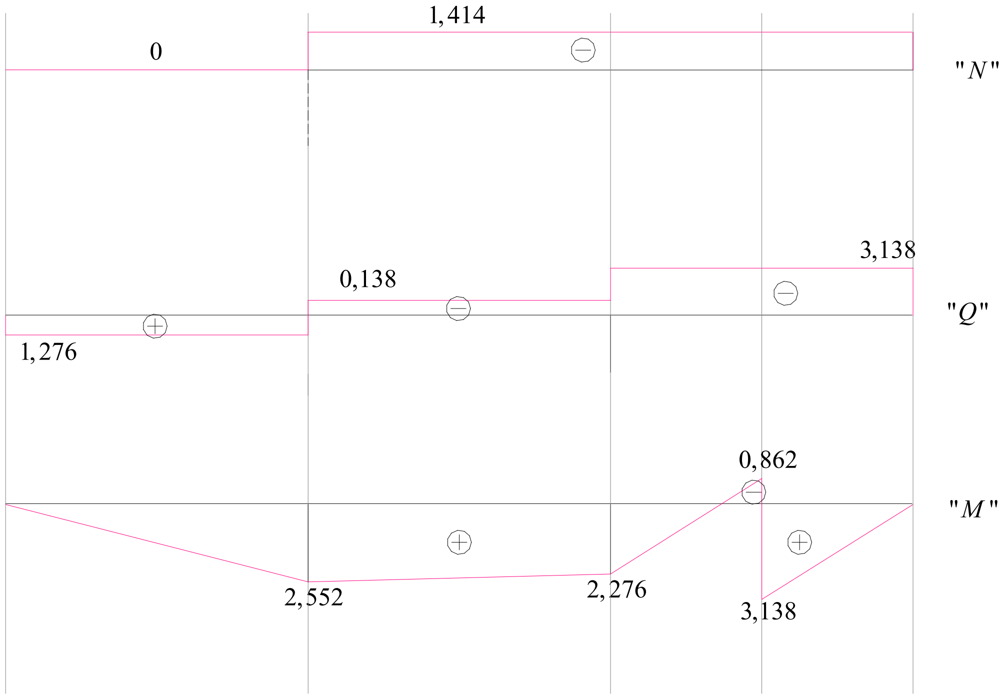
$$\sum V = 0: \quad \rightarrow \quad Q = -3,138 \text{ kN}$$
$$\sum M^{(E)} = 0: \quad +3,138 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \quad M = +3,138 \text{ kNm}$$

Schnitt IV:



$$\sum V = 0: \quad \rightarrow \quad Q = -3,138 \text{ kN}$$
$$\sum M^{(E)} = 0: \quad +3,138 \cdot 1 - 4 - M = 0 \rightarrow \quad M = -0,862 \text{ kNm}$$

<u>Verlauf der Schnittgrößen:</u>

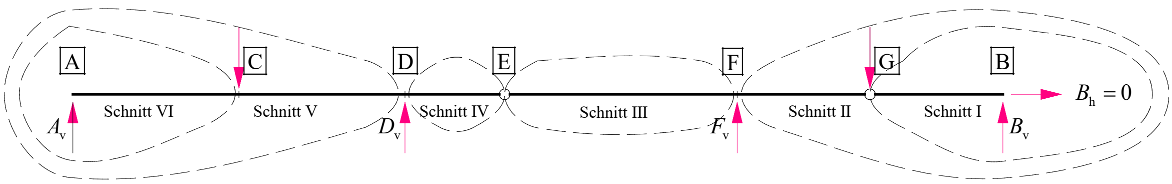


6.3 Dreiteiliger Gelenkträger mit Einzellasten

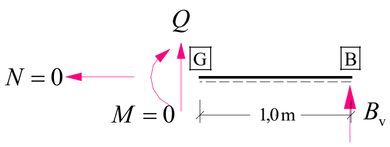
Tipp: bei Gelenkträgern ist es meist günstig, wenn man sich die einfachste Reihenfolge des Einbaus überlegt und dann die Berechnung in umgekehrter Reihenfolge durchführt.

Einbau	1.	2.	3.
Träger	A-E	E-G	G-B
Berechnung	3.	2.	1.

Schnitte:



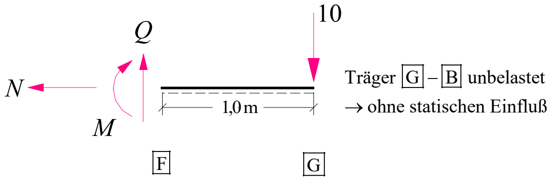
Schnitt I:



$$\sum M^{(G)} = 0: \quad \rightarrow B_v = 0$$

$$\sum V = 0: \quad \rightarrow Q = 0$$

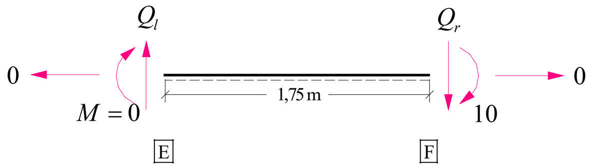
Schnitt II:



$$\sum V = 0: \quad \rightarrow \quad Q = +10 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(F)} = 0: \quad \rightarrow \quad M = -10 \text{ kNm}$$

Schnitt III:



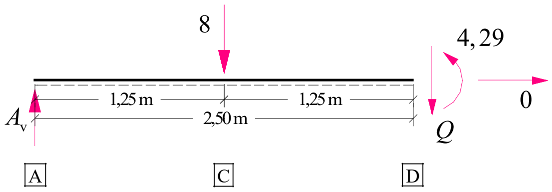
$$\sum M^{(E)} = 0: \quad -Q_r \cdot 1{,}75 - 10 = 0$$
$$\rightarrow Q_r = -5{,}71 \text{ kN}$$
$$\sum V = 0: \quad \rightarrow Q_l = Q_r = -5{,}71 \text{ kN}$$

Schnitt IV:

$Q = \text{konstant} = -5{,}71 \text{ kN}$

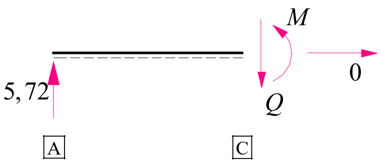
M bei $\boxed{\text{D}}$ nach Strahlensatz: $M = 10 \cdot \dfrac{0{,}75}{1{,}75} = +4{,}29 \text{ kN}$

Schnitt V:



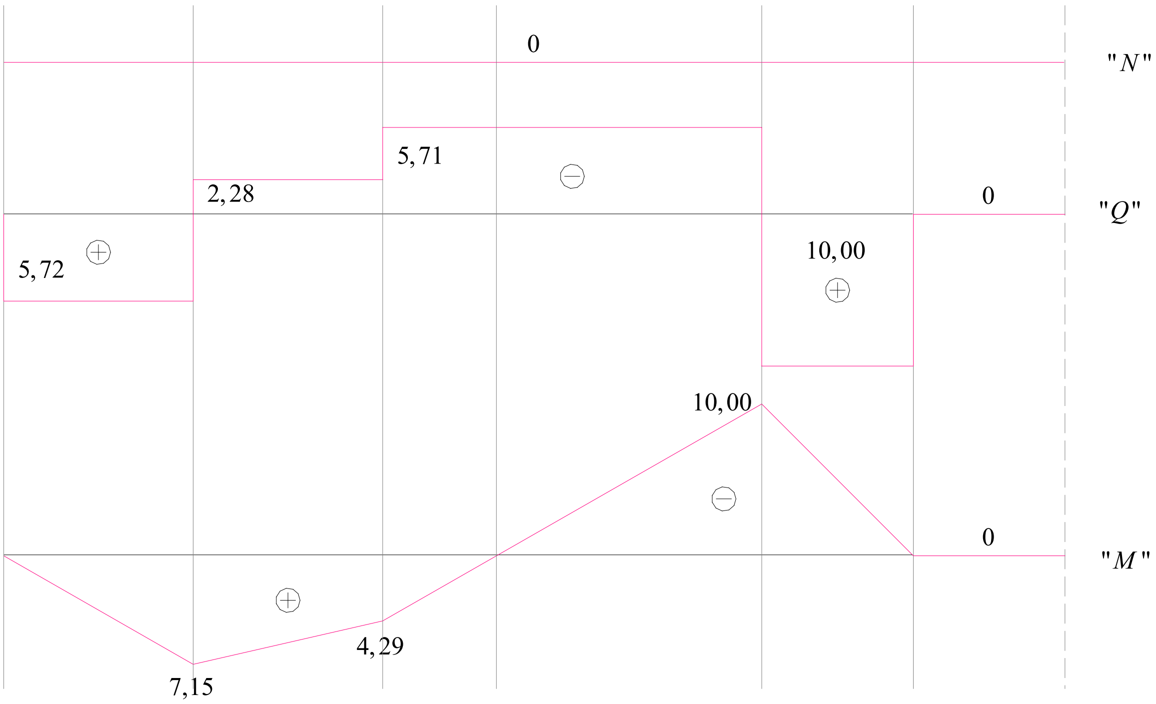
$$\sum M^{(D)} = 0: \quad -A_v \cdot 2{,}5 + 8 \cdot 1{,}25 + 4{,}29 = 0$$
$$\rightarrow A_v = 5{,}72 \text{ kN}$$
$$\sum V = 0: \quad -5{,}72 + 8 + Q = 0 \rightarrow Q = -2{,}28 \text{ kN}$$

Schnitt VI:



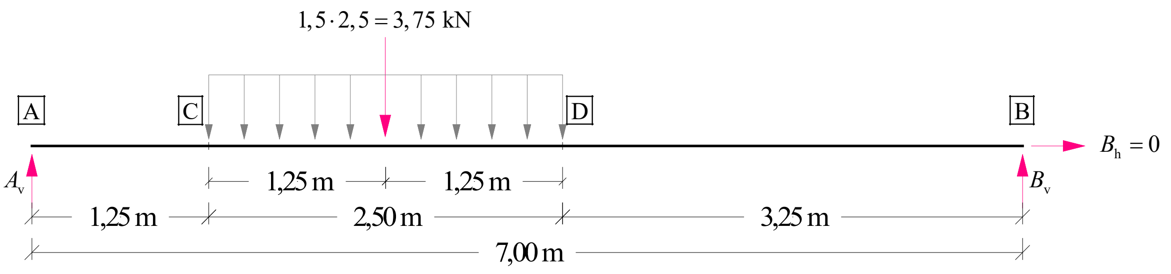
$$\sum V = 0: \quad Q = +5{,}72 \text{ kN}$$
$$\sum M^{(C)} = 0: -5{,}72 \cdot 1{,}25 + M = 0 \rightarrow M = +7{,}15 \text{ kN}$$

<u>Verlauf der Schnittgrößen:</u>



6.4 Einfeldbalken mit Gleichstreckenlast

Auflagerkräfte:



$$\sum H = 0: \quad \rightarrow \quad B_h = 0$$

$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -3,75 \cdot 2,5 + B_v \cdot 7 = 0 \rightarrow \quad B_v = 1,34 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad -A_v + 3,75 - 1,34 = 0 \rightarrow \quad A_v = 2,41 \text{ kN}$$

Kontrolle

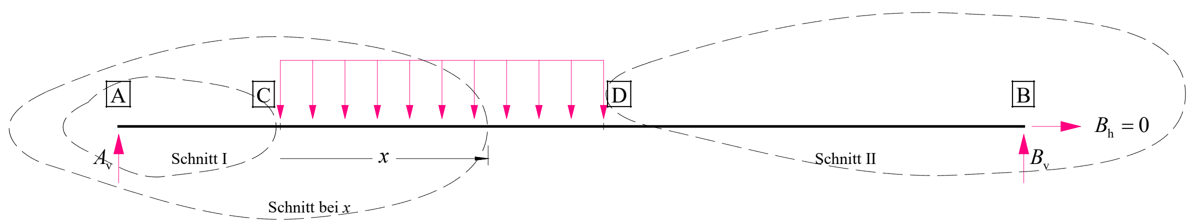
$$\sum M^{(B)} = 0: \quad \underbrace{-2,41 \cdot 7 + 3,75 \cdot 4,5}_{=0,005 \approx 0} = 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

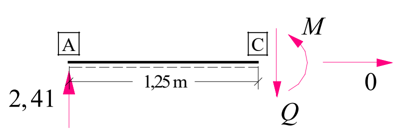
Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant bzw. $= 0$

Last	$Q(x)$	$M(x)$
Bereiche A-C und D-B: $q = 0$	$Q =$ konstant	$M =$ lineare Funktion
Bereich C-D: $q =$ konstant	$Q =$ lineare Funktion	$M =$ quadratische Parabel
keine Einzellasten	kein Sprung	kein Knick
keine Einzelmomente		kein Sprung

Schnitte:



Schnitt I:

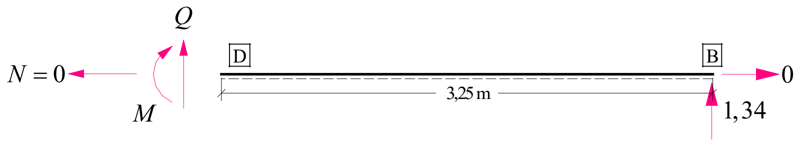


$$\sum M^{(C)} = 0: \quad -2,41 \cdot 1,25 + M = 0$$

$$\rightarrow M = +3,01 \text{ kNm}$$

$$\sum V = 0: \quad \rightarrow \quad Q = +2,41 \text{ kN}$$

Schnitt II:



$$\sum M^{(C)} = 0: \ +1,34 \cdot 3,25 - M = 0$$

$$\rightarrow M = +4,36 \text{ kNm}$$

$$\sum V = 0: \quad \rightarrow \ Q = -1,34 \text{ kN}$$

Berechnung der Stelle x_0, an der $Q = 0$ ist

mit Hilfe des Strahlensatzes:

$$\frac{x}{2,41} = \frac{2,5 - x}{1,34} \quad \Big| + \frac{x}{1,34}$$

$$\left(\frac{1}{2,41} + \frac{1}{1,34}\right)x = \frac{2,5}{1,34}$$

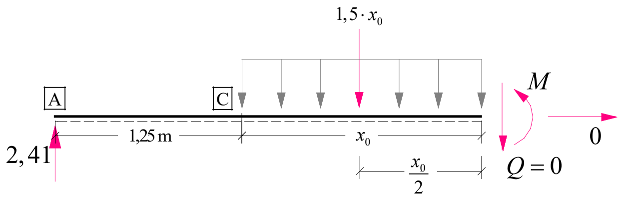
$$1,16x = 1,866$$

$$x = 1,61 \text{ m}$$

besser mit Gleichgewichtsbedingungen im nachfolgenden Schnitt:

$$\sum V = 0: -2,41 + 1,5 \cdot x_0 = 0 \rightarrow x_0 = \frac{2,41}{1,5} = 1,61$$

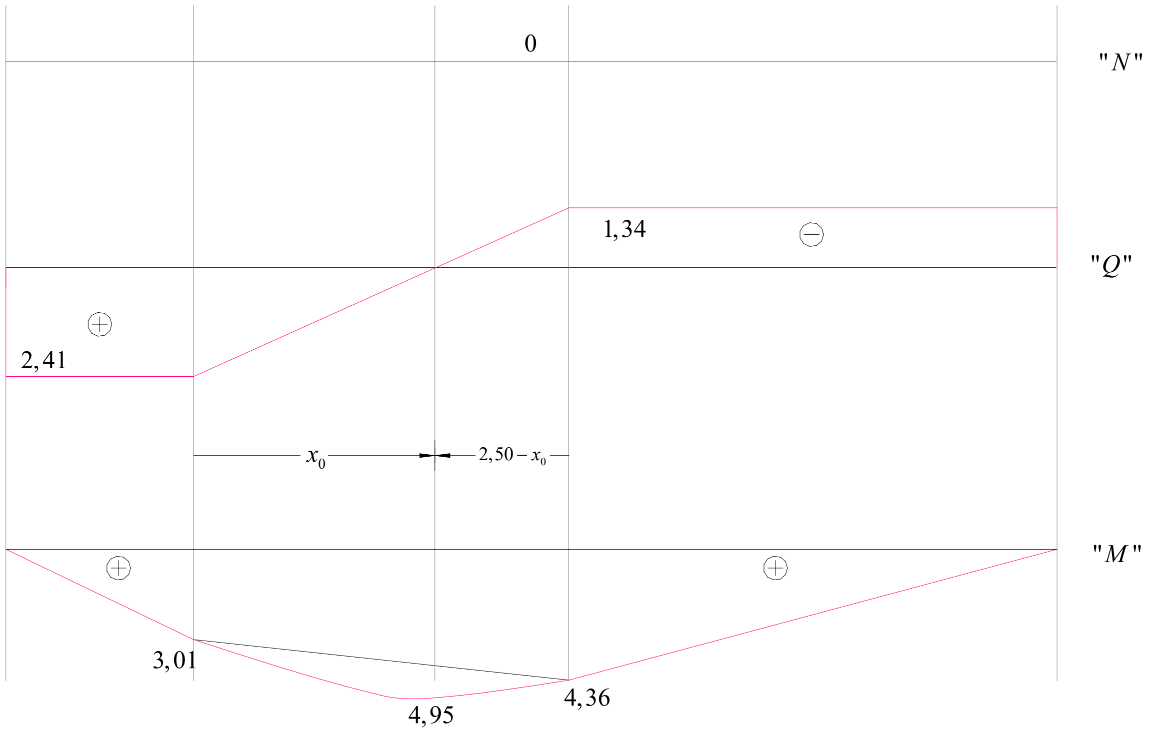
Berechnung des max. Momentes bei x_0



$$-2,41 \cdot (1,25 + x_0) + q \cdot x_0 \cdot \frac{x_0}{2} + M = 0$$

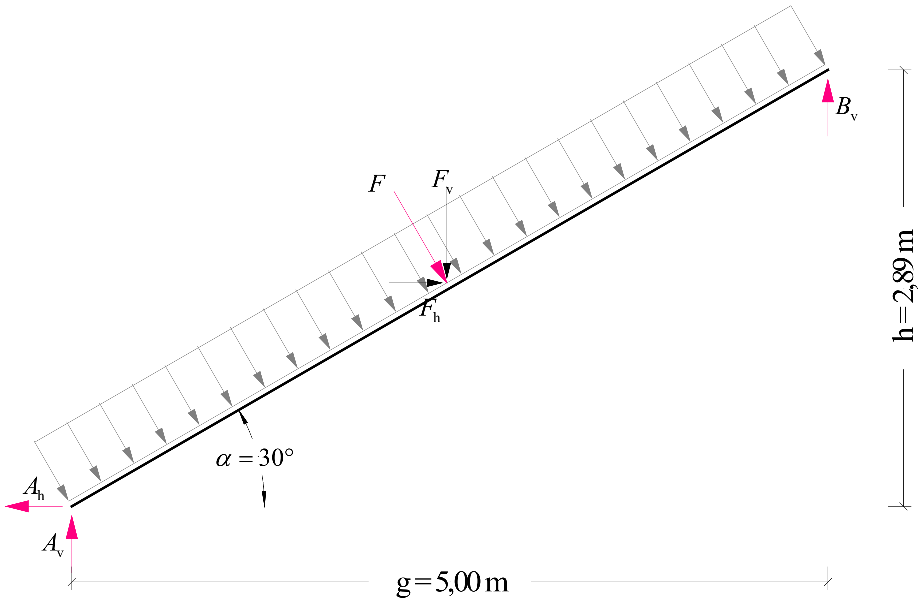
$$M = 2,41 \cdot 2,86 - 1,5 \cdot \frac{1,61^2}{2} = 4,95 \text{ kNm}$$

Verlauf der Schnittgrößen bei System 6.4:



6.5 Geneigter Einfeldbalken mit Gleichstreckenlast

Auflagerkräfte:



Geometrische Beziehungen:

$$l = \frac{g}{\cos\alpha} = \frac{5}{\cos 30°} \qquad = 5{,}77 \text{ m}$$

$$h = \frac{g}{\cos\alpha} \cdot \sin\alpha = g \cdot \tan\alpha = 5 \cdot \tan 30° \qquad = 2{,}89 \text{ m}$$

$$\frac{g}{l} = \cos\alpha \rightarrow \underline{g = l \cdot \cos\alpha}$$

$$\frac{h}{l} = \sin\alpha \rightarrow \underline{h = l \cdot \sin\alpha}$$

Zur Streckenlast äquivalente Einzellast F und ihre horizontale und vertikale Komponente:

$$F = q \cdot l = 5 \cdot 5{,}77 = 28{,}87$$

$$F_h = F \cdot \sin\alpha = q \cdot \underbrace{l \cdot \sin\alpha}_{=h} = q \cdot h = 5 \cdot 2{,}89 \qquad = 14{,}43 \text{ kN}$$

$$F_v = F \cdot \cos\alpha = q \cdot \underbrace{l \cdot \cos\alpha}_{=g} = q \cdot g = 5 \cdot 5 \qquad = 25{,}00 \text{ kN}$$

$$\sum H = 0: \quad -A_h + F_h = 0 \rightarrow \qquad A_h = 14{,}43 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(A)} = 0: \quad -F_h \cdot \frac{h}{2} - F_v \cdot \frac{g}{2} + B_v \cdot g = 0$$

$$-14{,}43 \cdot \frac{2{,}89}{2} - 25 \cdot 2{,}5 + B_v \cdot 5 = 0 \rightarrow \qquad B_v = 16{,}67 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad -A_v + 25 - 16{,}67 = 0 \rightarrow \qquad A_v = 8{,}33 \text{ kN}$$

Kontrolle

$$\sum M^{(B)} = 0: \quad -A_v \cdot g - A_h \cdot h + F_h \cdot \frac{h}{2} + F_v \cdot \frac{g}{2} \overset{!}{=} 0$$

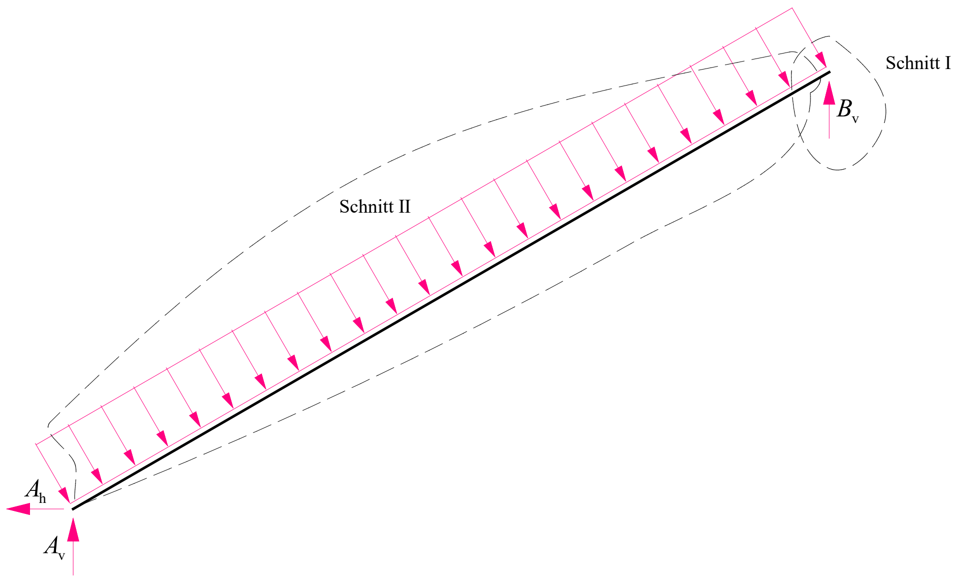
$$\underbrace{-8{,}33 \cdot 5 - 14{,}43 \cdot 2{,}89 + 14{,}43 \cdot \frac{2{,}89}{2} + 25 \cdot 2{,}5}_{=-0{,}001 \approx 0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \text{Kontrolle erfolgreich}$$

Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

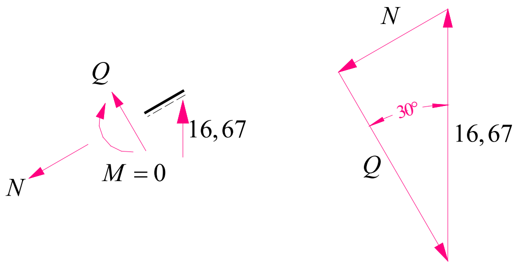
Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant

Last	$Q(x)$	$M(x)$
$q =$ konstant	$Q =$ lineare Funktion	$M =$ quadratische Parabel

Schnitte:

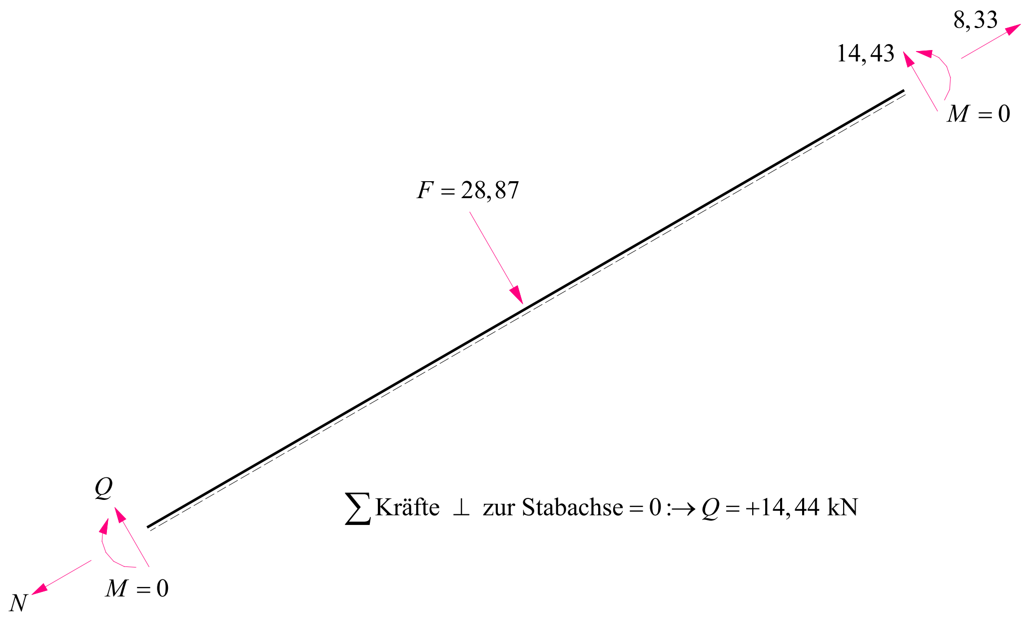


Schnitt I:



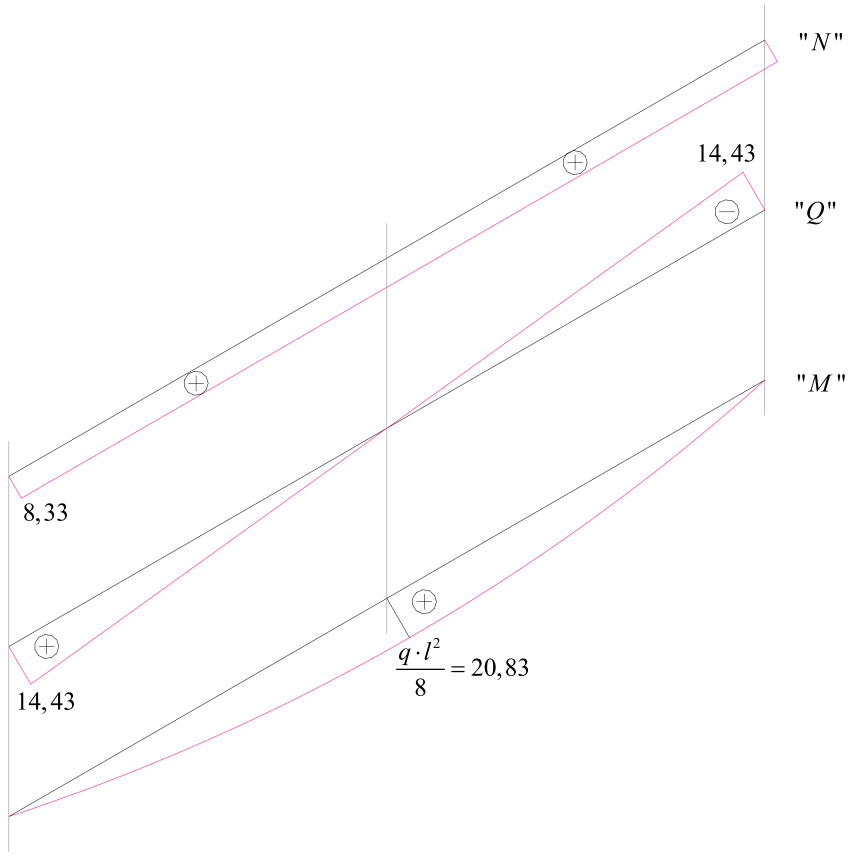
$$N = +16,67 \cdot \sin 30° = 8,33 \text{ kN}$$
$$Q = -16,67 \cdot \cos 30° = -14,43 \text{ kN}$$

Schnitt II:



$$\sum \text{Kräfte} \perp \text{zur Stabachse} = 0 : \rightarrow Q = +14{,}44\ \text{kN}$$

<u>Verlauf der Schnittgrößen:</u>



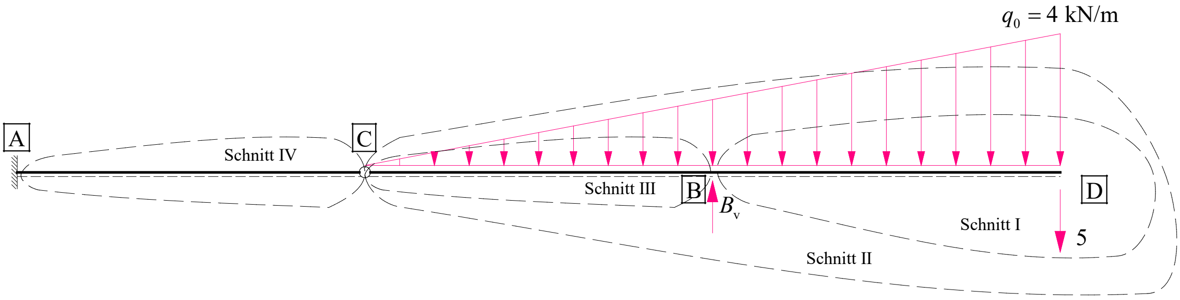
6.6 Zweiteiliger Träger mit dreiecksförmiger Streckenlast und Einzellast

Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

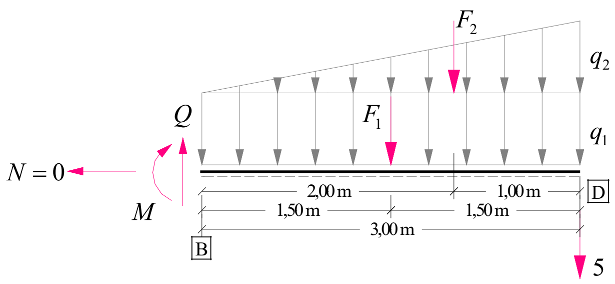
Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant bzw. $= 0$

Last	$Q(x)$	$M(x)$
Bereich A-C $q = 0$	$Q =$ konstant	$M =$ lineare Funktion
Bereich C-D $q =$ linear	$Q =$ Parabel 2. Ordnung	$M =$ Parabel 3. Ordnung
Auflagerkraft B_v bei B	Sprung um $+B_v$	Knick

Schnitte:



Schnitt I:



$$q_1 = q_2 = \frac{q_0}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ kN/m}$$

$$F_1 = q_1 \cdot 3{,}0 = 2 \cdot 3 = 6 \text{ kN} F_2 = 3 \text{ kN}$$

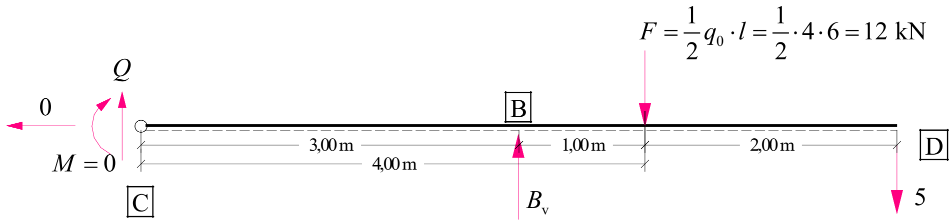
$$\sum V = 0: \quad -Q + 6 + 3 + 5 = 0$$

$$\rightarrow Q = +14 \text{ kN}$$

$$\sum M^{(B)} = 0: -M - 6 \cdot 1{,}5 - 3 \cdot 2 - 5 \cdot 3 = 0$$

$$\rightarrow \quad M = -30 \text{ kNm}$$

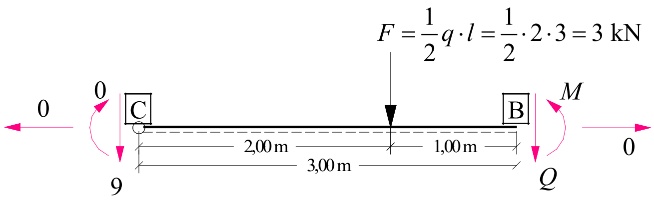
Schnitt II:



$$\sum M^{(C)} = 0: \quad B_v \cdot 3 - 12 \cdot 4 - 5 \cdot 6 = 0 \rightarrow \quad B_v = +26 \text{ kN}$$

$$\sum V = 0: \quad -Q - 26 + 12 + 5 = 0 \rightarrow \quad Q = -9 \text{ kN}$$

Schnitt III:

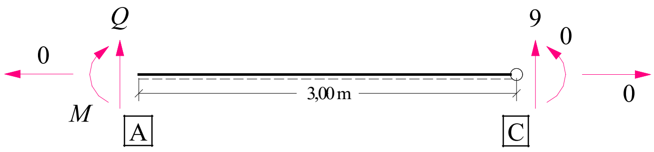


$$\sum V = 0: \ +9+3+Q=0$$
$$\rightarrow Q = -12 \text{ kN}$$

Kontrolle:

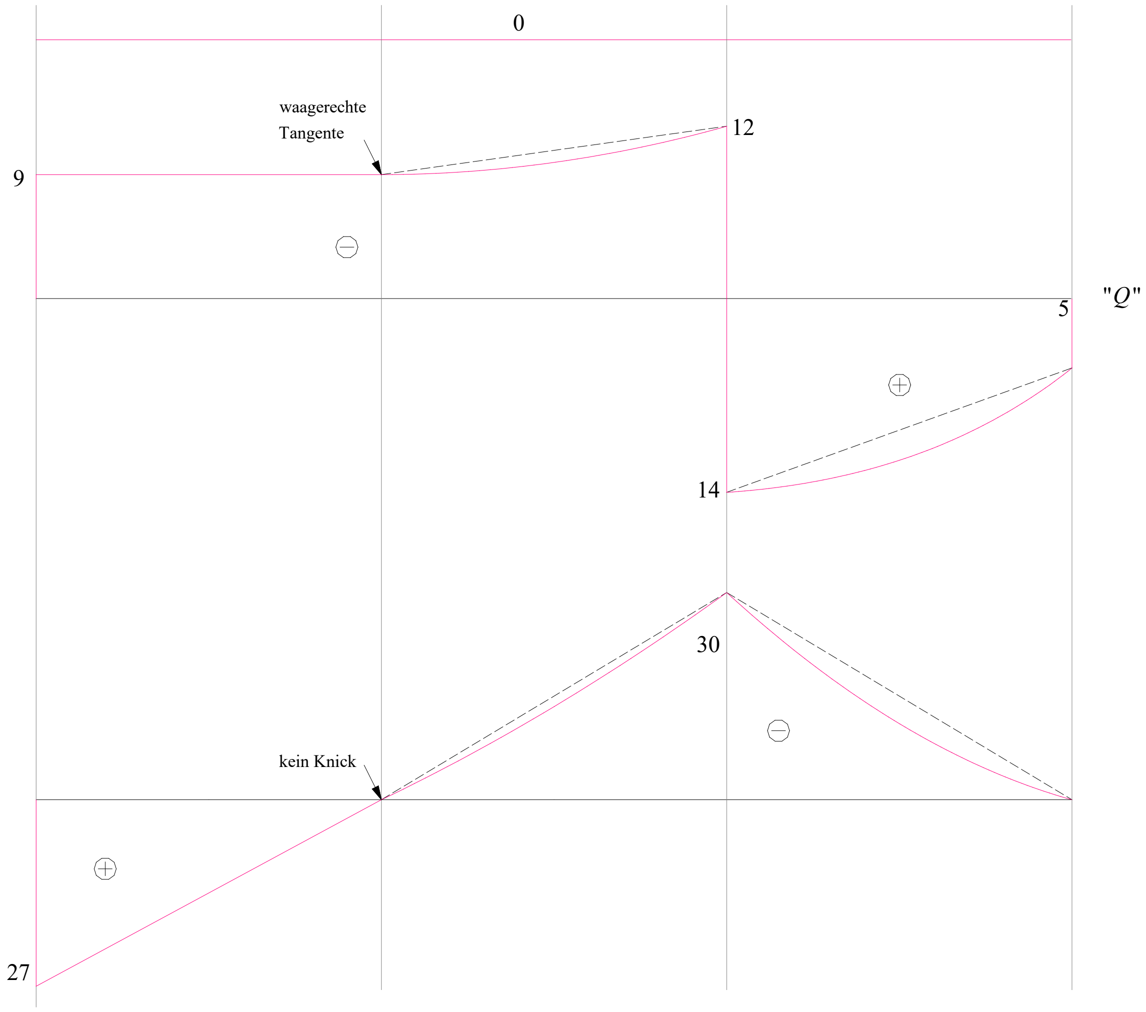
$$\sum M^{(B)} = 0 : 9 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + M = 0$$
$$\rightarrow M = -30 \text{ kNm}$$

Schnitt IV:



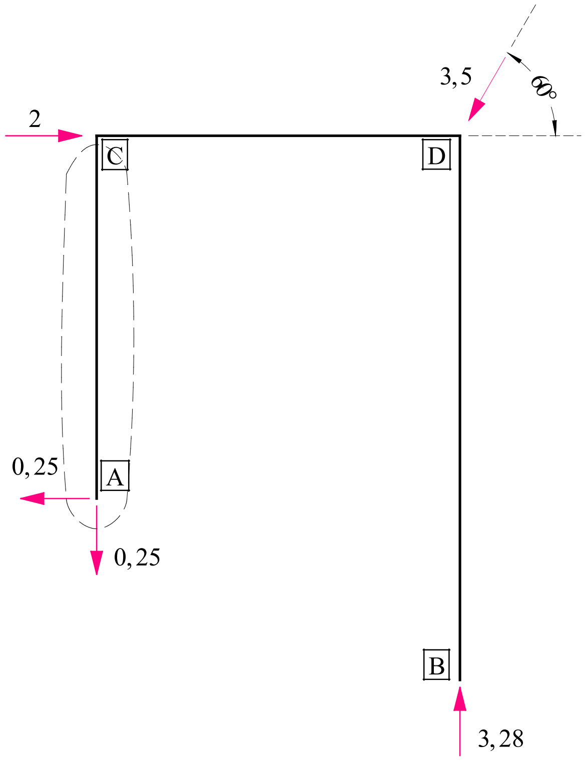
$$\sum M^{(A)} = 0: \ -M + 9 \cdot 3 = 0$$
$$\rightarrow M = +27 \text{ kNm}$$

Verlauf der Schnittgrößen bei System 6.6:



6.7 Rechteckrahmen mit zwei Einzellasten

Schnitte (Auflagerkräfte siehe Aufgabe 4.7):

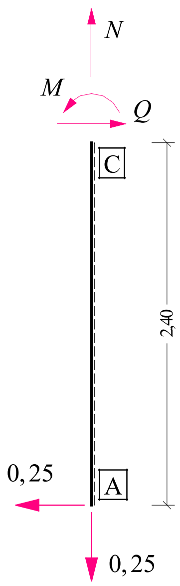


Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant

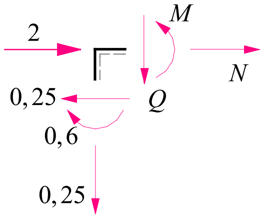
Last	$Q(x)$	$M(x)$
$q = 0$	$Q =$ konstant	$M =$ lineare Funktion

Schnitt Stiel A-C:



$$N = +0,25 \text{ kN}$$
$$Q = +0,25 \text{ kN}$$
$$M = +0,25 \cdot 2,40 = +0,60 \text{ kNm}$$

Schnitt um Knoten C:

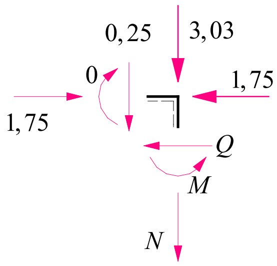


$$N = +0,25 - 2 = -1,75 \text{ kN}$$
$$Q = -0,25 \text{ kN}$$
$$M = +0,60 \text{ kNm}$$

Aus Differentialbeziehungen folgt für linearen Verlauf der Momentenlinie im Bereich C-D:

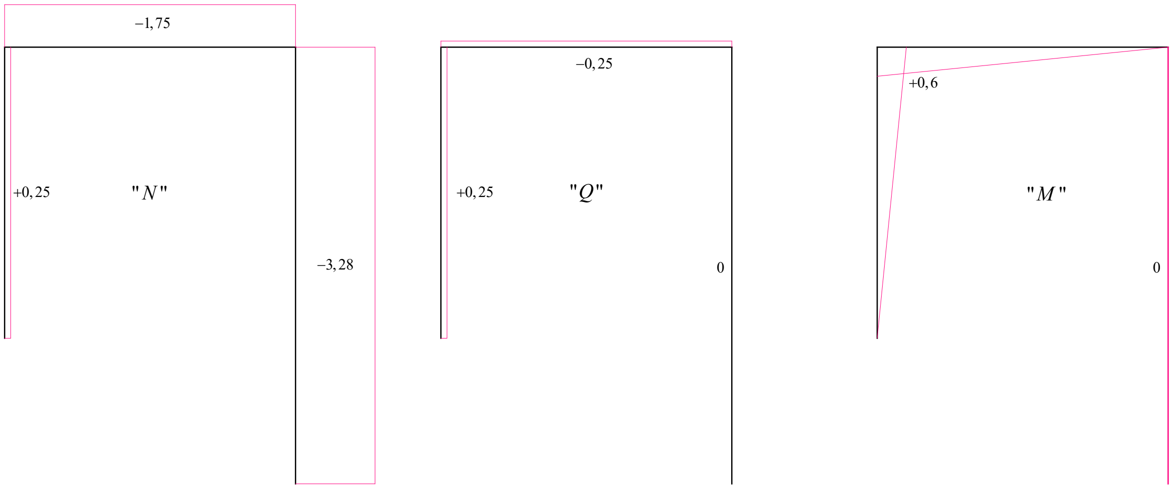
$$M_r = M_l + Q \cdot l = 0,60 + (-0,25) \cdot 2,40 = 0$$

Schnitt um Knoten D:



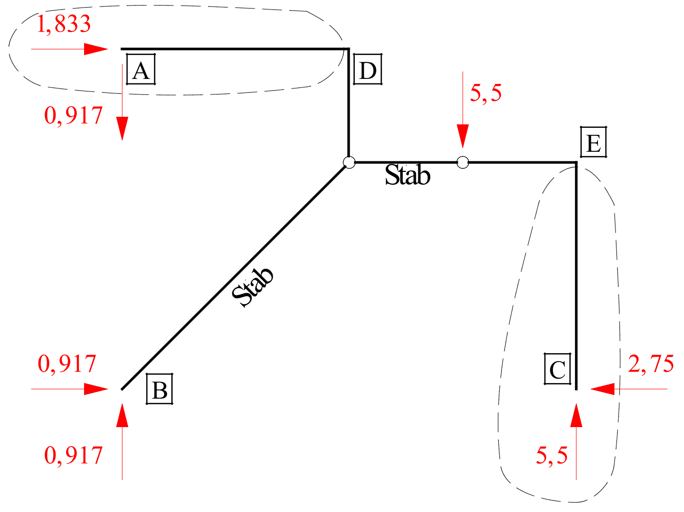
$$N = -0,25 - 3,03 = -3,28 \text{ kN}$$
$$Q = 1,75 - 1,75 = 0$$
$$M = 0$$

<u>Verlauf der Schnittgrößen:</u>



6.8 Rahmentragwerk mit einer Einzellast

Schnitte (Auflagerkräfte siehe Aufgabe 4.8):

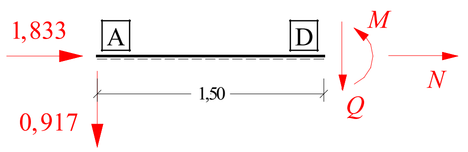


Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x)=0 \rightarrow N(x)=$ konstant

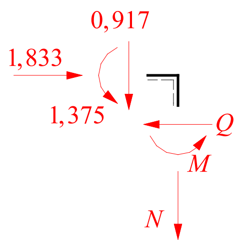
Last	$Q(x)$	$M(x)$
$q=0$	$Q=$ konstant	$M=$ lineare Funktion

Schnitt Balken A-D:



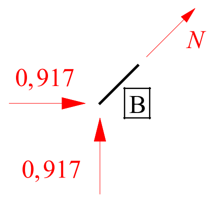
$$N = -1{,}833 \text{ kN}$$
$$Q = -0{,}917 \text{ kN}$$
$$M = -0{,}917 \cdot 1{,}50 = -1{,}375 \text{ kNm}$$

Schnitt um Knoten D:



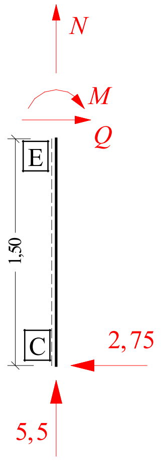
$$N = -0{,}917 \text{ kN}$$
$$Q = +1{,}833 \text{ kN}$$
$$M = -1{,}375 \text{ kNm}$$

Schnitt um Knoten B:



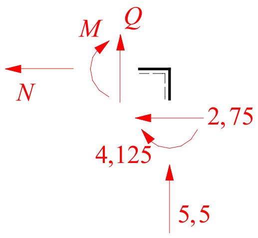
$$N = -0{,}917 \cdot \sqrt{2} = -1{,}297 \text{ kN}$$

Schnitt Stiel C-E:



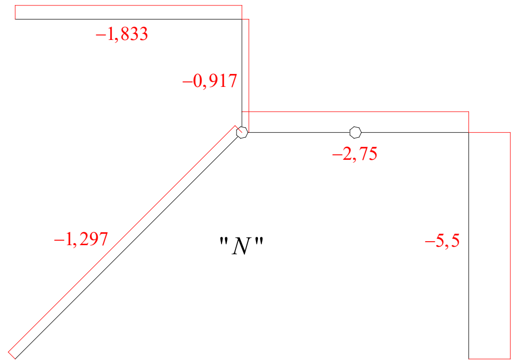
$$N = -5{,}5 \text{ kN}$$
$$Q = +2{,}75 \text{ kN}$$
$$M = -2{,}75 \cdot 1{,}5 = -4{,}125 \text{ kNm}$$

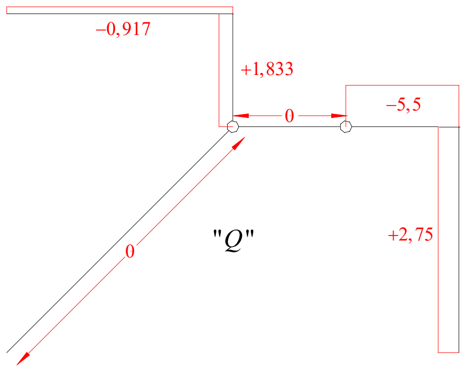
Schnitt um Knoten E:

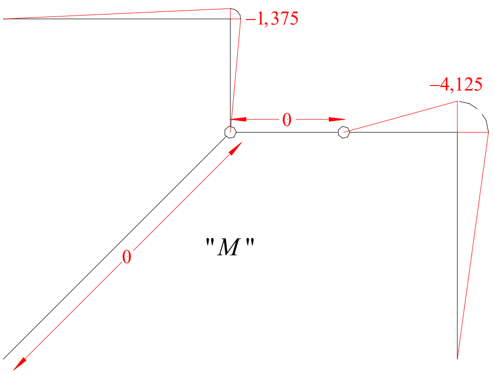


$$N = -2{,}75 \text{ kN}$$
$$Q = -5{,}5 \text{ kN}$$
$$M = -4{,}125 \text{ kNm}$$

<u>Verlauf der Schnittgrößen:</u>

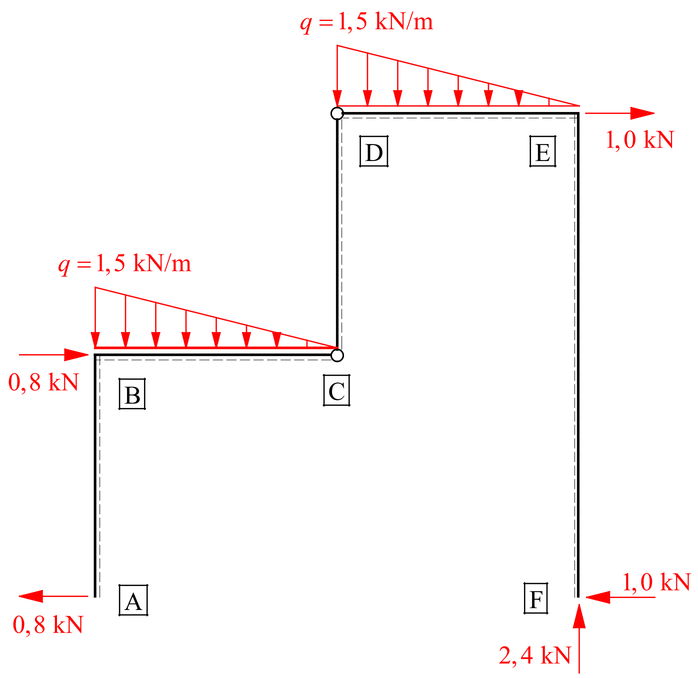






6.9 Rahmentragwerk mit dreiecksförmigen Streckenlasten

Auflagerkräfte siehe Aufgabe 4.9:

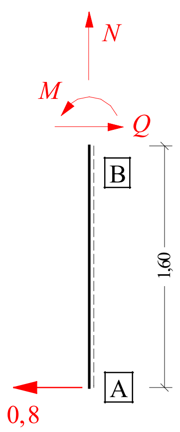


Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant

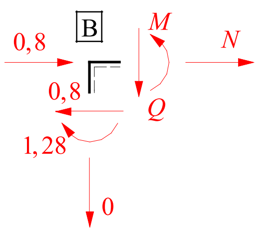
Bereich	Last	$Q(x)$	$M(x)$
$\boxed{A} - \boxed{B}$, $\boxed{C} - \boxed{D}$, $\boxed{E} - \boxed{F}$	$q = 0$	$Q =$ konstant	$M =$ lineare Funktion
$\boxed{B} - \boxed{C}$, $\boxed{D} - \boxed{E}$	$q =$ lineare Funktion	$Q =$ Parabel 2. O.	$M =$ Parabel 3. O.

Schnitt Stiel A-B:



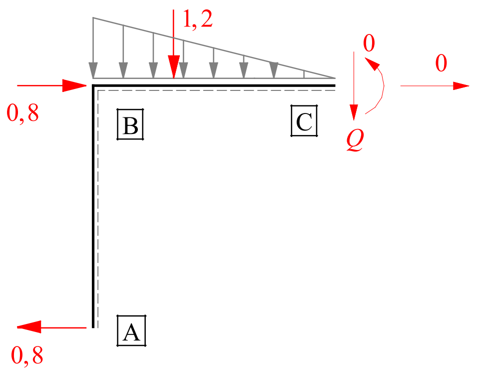
$$N = 0$$
$$Q = +0{,}8 \text{ kN}$$
$$M = +0{,}8 \cdot 1{,}60 = +1{,}28 \text{ kNm}$$

Schnitt um Knoten B



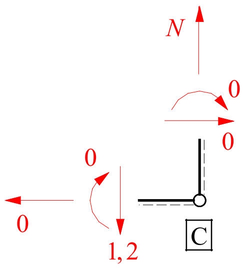
$$N = 0$$
$$Q = 0$$
$$M = +1{,}28 \text{ kNm}$$

Schnitt um Teilsystem A-B-C:



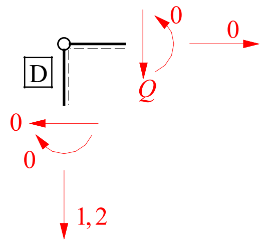
$$Q = -1{,}2 \text{ kN}$$

Schnitt um Knoten C:



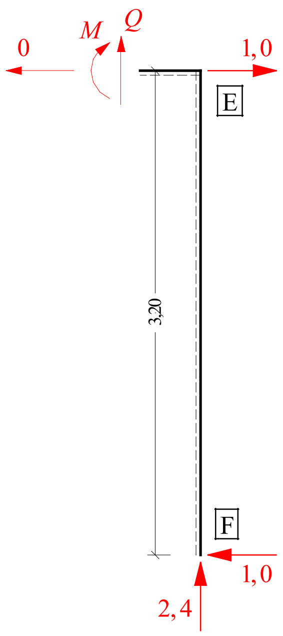
$$N = +1{,}2 \text{ kN}$$

Schnitt um Knoten D:



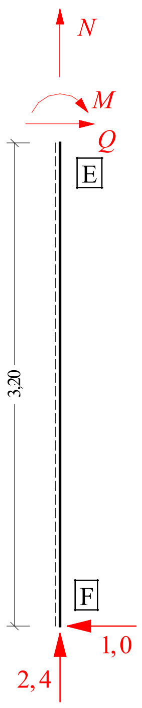
$$Q = -1{,}2 \text{ kN}$$

Schnitt um Teilsystem E-F (links von E):



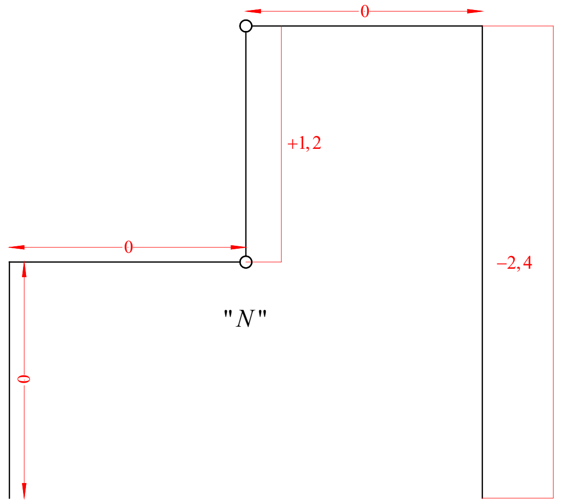
$$Q = -2{,}4 \text{ kN}$$
$$M = -1{,}0 \cdot 3{,}2 = -3{,}2 \text{ kNm}$$

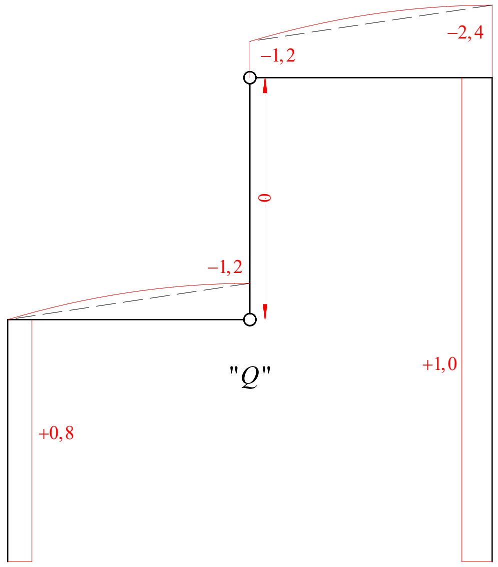
Schnitt um Teilsystem E-F (unterhalb von E):

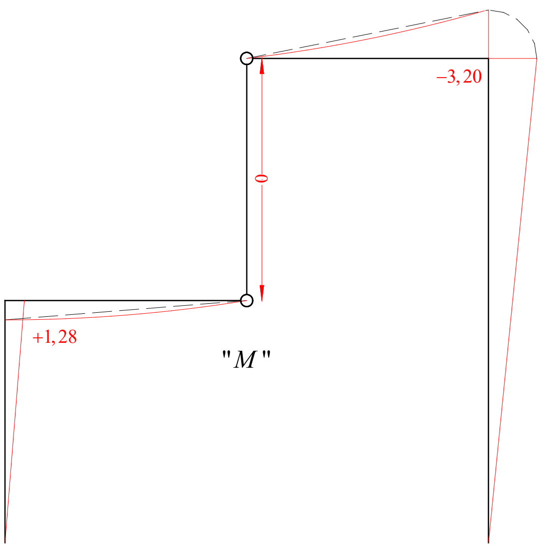


$$N = -2{,}4 \text{ kN}$$
$$Q = +1{,}0 \text{ kN}$$
$$M = -1{,}0 \cdot 3{,}2 = -3{,}2 \text{ kNm}$$

<u>Verlauf der Schnittgrößen:</u>

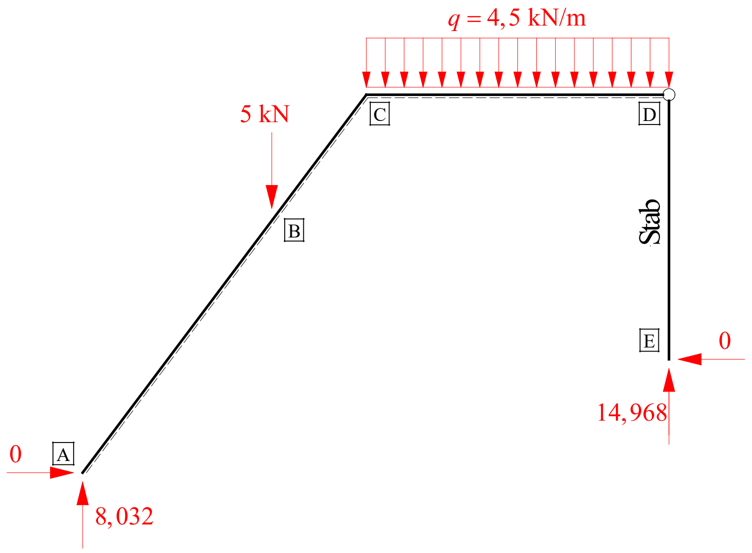






6.10 Rahmentragwerk mit schrägem Stiel

Auflagerkräfte:

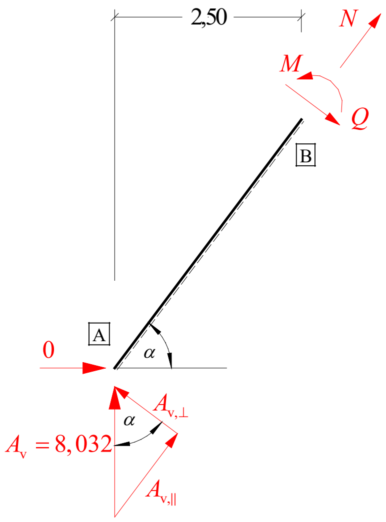


Wie muss der Verlauf der Schnittgrößen *N*, *Q* und *M* aussehen?

Streckenlast parallel zur Balkenachse: $p(x) = 0 \rightarrow N(x) =$ konstant

Bereich	Last	$Q(x)$	$M(x)$
$\boxed{A}-\boxed{B}$, $\boxed{B}-\boxed{C}$, $\boxed{D}-\boxed{E}$	$q=0$	$Q=$ konstant	$M=$ lineare Funktion
$\boxed{C}-\boxed{D}$	$q=$ konstant	$Q=$ lineare Funktion	$M=$ Parabel 2. O.
$\boxed{B}$	Einzellast	Sprung	Knick

Schnitt um Teilsystem A-B (unterhalb von B):



$$\frac{A_{v,\parallel}}{A_v} = \sin\alpha = \frac{5,00}{6,25} = 0,800 \rightarrow A_{v,\parallel} = 0,8 \cdot A_v = 6,43 \text{ kN}$$

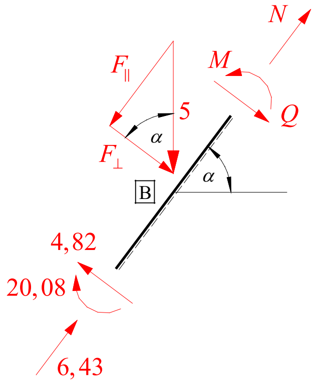
$$\frac{A_{v,\perp}}{A_v} = \cos\alpha = \frac{3,75}{6,25} = 0,600 \rightarrow A_{v,\perp} = 0,6 \cdot A_v = 4,82 \text{ kN}$$

$$N = -A_{v,\parallel} = -6,43 \text{ kN}$$

$$Q = +A_{v,\perp} = +4,82 \text{ kN}$$

$$M = +A_v \cdot 2,50 = +20,08 \text{ kNm}$$

Schnitt um Punkt B:

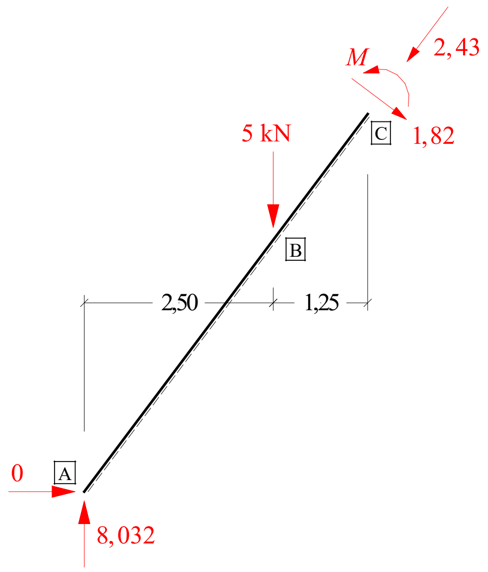


$$\frac{F_{\parallel}}{5} = \sin\alpha = \frac{5,00}{6,25} = 0,800 \rightarrow F_{\parallel} = 0,8 \cdot 5,0 = 4,0 \text{ kN}$$

$$\frac{F_{\perp}}{5} = \cos\alpha = \frac{3,75}{6,25} = 0,600 \rightarrow F_{\perp} = 0,6 \cdot 5,0 = 3,0 \text{ kN}$$

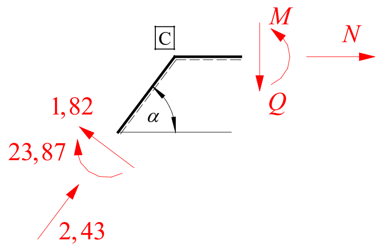
$$N = -6,43 + F_{\parallel} = -2,43 \text{ kN}$$

$$Q = +4,82 - F_{\perp} = +1,82 \text{ kN}$$



$$M = +8,032 \cdot 3,75 - 5,0 \cdot 1,25 = +23,87 \text{ kN}$$

Schnitt um Knoten C:

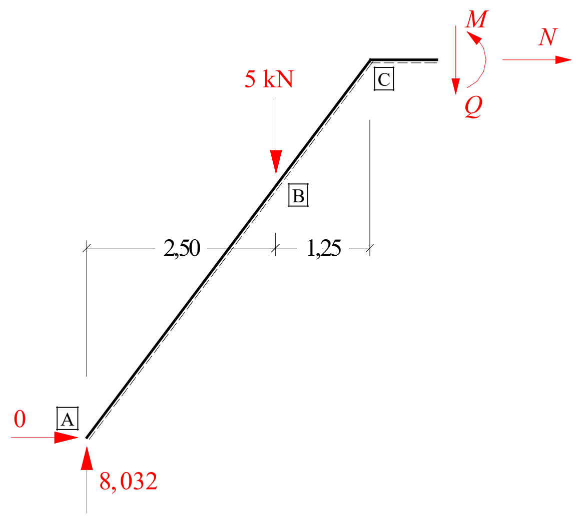


$$\sum H = 0 \rightarrow N = -2,43 \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{0,6} + 1,82 \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{0,8} = -0,002 \cong 0$$

$$\sum V = 0 \rightarrow Q = +2,43 \cdot \underbrace{\sin\alpha}_{0,8} + 1,82 \cdot \underbrace{\cos\alpha}_{0,6} = +3,036 \text{ kN}$$

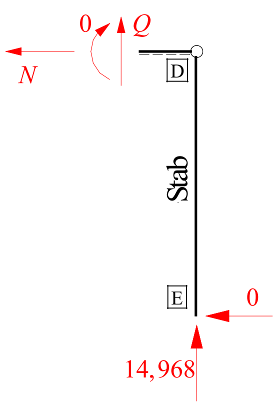
$$M = +23,87 \text{ kNm}$$

Alternativ zum Schnitt um C: Schnitt um Teilsystem A-C (rechts von C):



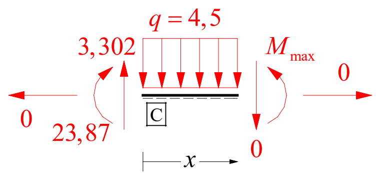
$$N = 0$$
$$Q = +3{,}032 \text{ kN}$$
$$M = +8{,}032 \cdot 3{,}75 - 5 \cdot 1{,}25 = +23{,}87 \text{ kNm}$$

Schnitt um Teilsystem D-E (links von D):



$$Q = -14{,}97 \text{ kN}$$

Nullstelle der Querkraft im Riegel C-D und maximales Moment:



$$\sum V = 0: -3{,}032 + \underbrace{q}_{4{,}5} \cdot x = 0 \rightarrow x = 0{,}674 \text{ m}$$

$$\sum M^{(C)} = 0: -23{,}87 - q \cdot \frac{x^2}{2} + M_{max} = 0 \rightarrow M_{max} = +24{,}89 \text{ kNm}$$

Verlauf der Schnittgrößen: