Prof. Ralf-W. Boddenberg
Baustatik und Holzbau

Hochschule Wismar

Übungen Holzbau II
Lösungen

DIN EN 1995-1-1 Eurocode 5:2010-12
DIN EN 1995-1-1 Nationaler Anhang:2013-08
DIN EN 1995-1-1/A2:2014-07

Sommersemester 2018

Inhaltsverzeichnis Lösungen zu Übungen Holzbau II

1 Zimmermannsmäßige Verbindungen

1.1 Entwurf eines Stabanschlusses mit Stirnversatz

a) Entwurf des Stirnversatzes

Abmessungen und Tragfähigkeit des Stirnversatzes

$$\alpha = \frac{60°}{2} = 30° \qquad f_{c,\alpha,d} = 1{,}125 \cdot 7{,}52 = 8{,}46 \text{ N/mm}^2$$

$$t_v \le h_G / 6 \;\rightarrow \text{gewählt } \; t_v = 180/6 = 30 \text{ mm}$$

$$\text{erf } t_v = \frac{S_d \cdot \cos^2\alpha}{b \cdot f_{c,\alpha,d}} \rightarrow \max S_d = \frac{t_v \cdot b \cdot f_{c,\alpha,d}}{\cos^2\alpha} = \frac{30 \cdot 120 \cdot 8{,}46}{\cos^2 30°} = 40.608 \text{ N} = 40{,}6 \text{ kN}$$

$$k_{cr} \cdot f_{v,d} = 1{,}125 \cdot 1{,}23 = 1{,}38$$

$$\text{erf } l_v = \frac{S_d \cdot \cos\gamma}{b \cdot k_{cr} \cdot f_{v,d}} = \frac{40.600 \cdot \cos 60°}{120 \cdot 1{,}38} = 123 \text{ mm} \rightarrow \text{gewählt 200 mm}$$

$$\frac{\text{erf } l_v}{8 \cdot t_v} = \frac{123}{240} = 0{,}51 \le 1$$

b) Nachweis der Tragfähigkeit im Last aufnehmenden horizontalen Zugstab für die maximal anzuschließende Kraft im Druckstab.

$$\left(\max\{b,h\} = 180 \text{ mm}\right) > 150 \text{ mm} \rightarrow f_{t,0,d} = 1{,}0 \cdot 1{,}125 \cdot 8{,}62 = 9{,}70 \text{ N/mm}^2$$

$$\left(h = 180 \text{ mm}\right) > 150 \text{ mm} \rightarrow f_{m,d} = 1{,}125 \cdot 14{,}8 = 16{,}7 \text{ N/mm}^2$$

$$U_d = S_d \cdot \cos\gamma = 40{,}6 \cdot \cos 60° = 20{,}3 \text{ kN}$$

$$M = U_d \cdot e = 20.300 \cdot \left(30/2\right) = 304.500 \text{ Nmm}$$

$$A_n = 120 \cdot \left(180 - 30\right) = 120 \cdot 150 = 18.000 \text{ mm}^2$$

$$W_n = 120 \cdot \frac{150^2}{6} = 450.000 \text{ mm}^3$$

$$\frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,d}}{f_{m,d}} = \frac{\frac{20.300}{18.000}}{9{,}70} + \frac{\frac{304.500}{450.000}}{16{,}7} = \frac{1{,}128}{9{,}70} + \frac{0{,}677}{16{,}7} = 0{,}112 + 0{,}041 = 0{,}15 \le 1$$

c) Tragfähigkeit des Druckstabes nach für den Fall, dass der Stirnversatz am oberen Ende auf der entgegengesetzten Stabseite liegt

Die y-Achse des Querschnitts wird senkrecht zur Zeichenebene angenommen.

Nachweis der Knickstabilität um die y-Achse (in der Stabmitte ist $e = 0$ und somit $M_y = 0$)

$$f_{c,0,d} = 1{,}125 \cdot 12{,}9 = 14{,}5 \text{ N/mm}^2$$

$$\lambda_y = \frac{l_{ef,y}}{i_y} = \frac{l_{ef,y}}{\left(h_z/\sqrt{12}\right)} = \frac{2.600 \cdot \sqrt{12}}{100} = 90{,}1 \rightarrow k_{c,y} = 0{,}364$$

$$\sigma_{c,0,d} = \frac{40.600}{100 \cdot 120} = 3{,}38 \text{ N/mm}^2$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} = \frac{3{,}38}{0{,}364 \cdot 14{,}5} = 0{,}64 < 1$$

Nachweis der Knickstabilität um die z-Achse (in Stabmitte)

$$\lambda_z = \frac{l_{ef,z}}{i_z} = \frac{l_{ef,z}}{\left(h_y/\sqrt{12}\right)} = \frac{2.600 \cdot \sqrt{12}}{120} = 75,1 \rightarrow k_{c,z} = 0,494 \rightarrow \text{nicht maßgeblich}$$

Nachweis für Biegung und Druck (an den Stabenden)

$$(h = 100 \text{ mm}) \rightarrow f_{m,y,d} = k_{h,y} \cdot 1,125 \cdot 14,8 = 1,084 \cdot 1,125 \cdot 14,8 = 18,0 \text{ N/mm}^2$$

$$e = 0,5 \cdot (h_D - t_v) = 0,5 \cdot (100 - 30) = 35 \text{ mm}$$

$$M_{y,d} = S_d \cdot e = 40.600 \cdot 35 = 1,421 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \rightarrow \sigma_{m,y,d} = \frac{1,421 \cdot 10^6}{\frac{120 \cdot 100^2}{6}} = 7,11 \text{ N/mm}^2$$

$$M_{z,d} = 0 \rightarrow \sigma_{m,z,d} = 0$$

$$(h = 100 \text{ mm}) < 150 \text{ mm} \rightarrow f_{m,d} = 1,084 \cdot 1,125 \cdot 14,8 = 18,0 \text{ N/mm}^2$$

$$\left(\frac{\sigma_{c,0,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,y,d}}{f_{m,y,d}} = \left(\frac{3,38}{14,5}\right)^2 + \frac{7,11}{18,0} = (0,233)^2 + 0,395 = 0,45 < 1$$

d) Tragfähigkeit des Druckstabes nach für den Fall, dass der Stirnversatz am oberen Ende auf der <u>gleichen Stabseite</u> liegt

$e = 35 \text{ mm} \rightarrow$ konstant über die Länge des Stabs

Nachweis der Knick- und Kippstabilität um die y-Achse (in Stabmitte)

$$\frac{l_{ef} \cdot h}{b^2} = \frac{2.600 \cdot 100}{120^2} = 18,1 < 135 = (0,75/\kappa_m)^2 \rightarrow k_{crit} = 1$$

$$\sigma_{m,y,d} = 7,11 \text{ N/mm}^2 \quad \text{(siehe oben)}$$

$$M_{z,d} = 0 \rightarrow \sigma_{m,z,d} = 0$$

$$\sigma_{c,0,d} = 3,38 \text{ N/mm}^2 \quad \text{(siehe oben)}$$

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,y} \cdot f_{c,0,d}} + \frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} \cdot f_{m,y,d}} + \cancel{\left(\frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}}\right)^2} = \frac{3,38}{0,364 \cdot 14,5} + \frac{7,11}{1,0 \cdot 18,0} = 0,640 + 0,395 = 1,035 > 1 \rightarrow \text{unzulässig}$$

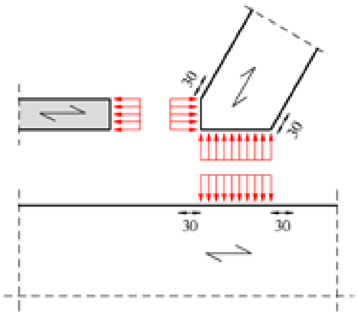
Nachweis der Knickstabilität um die z-Achse (in Stabmitte): $k_{c,z} = 0,494$ siehe oben.

$$\frac{\sigma_{c,0,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} + \left(\frac{\sigma_{m,y,d}}{k_{crit} \cdot f_{m,y,d}}\right)^2 + \cancel{\frac{\sigma_{m,z,d}}{f_{m,z,d}}} = \frac{3,38}{0,494 \cdot 14,5} + \left(\frac{7,11}{1 \cdot 18,0}\right)^2 = 0,472 + 0,156 = 0,63 < 1$$

1.2 Tragfähigkeit eines Druckanschlusses mit einer Knagge

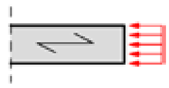
Kein Versatzanschluss, daher sind die allgemeinen Nachweise für Druck anzuwenden:

$$\frac{\sigma_{c,\alpha,d}}{f_{c,\alpha,d}} = \frac{\frac{F_{c,\alpha,d}}{A_{ef}}}{f_{c,\alpha,d}} \leq 1 \rightarrow F_{c,\alpha,d} \leq A_{ef} \cdot f_{c,\alpha,d}$$



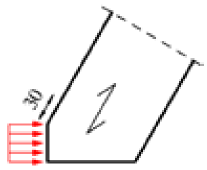
- Maximal aufnehmbare Horizontalkomponente $S_{H,d}$ und S_d (Kontaktfläche Knagge-Druckstab)

$S_{H,d}$ aus Drucknachweis in der Kontaktfläche der Knagge



$$\alpha = 0° \rightarrow f_{c,0,d} = 1{,}125 \cdot 12{,}9 = 14{,}5 \text{ N/mm}^2$$
$$A_{ef} = 40 \cdot 120 = 4.800 \text{ mm}^2$$
$$S_{H,d} \leq A_{ef} \cdot f_{c,0,d} = 4.800 \cdot 14{,}5 = 69.600 \text{ N} = 69{,}6 \text{ kN}$$

$S_{H,d}$ aus Drucknachweis in der Kontaktfläche des Druckstabes



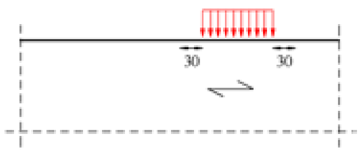
$$\alpha = 60°, k_{c,90} = 1{,}0 \rightarrow f_{c,\alpha,d} = 1{,}125 \cdot 1{,}97 = 2{,}22 \text{ N/mm}^2$$
$$A_{ef} = \left(\underbrace{40 + 30 \cdot \sin 60°}_{66{,}0 \text{ mm}}\right) \cdot 120 = 7.920 \text{ mm}^2$$
$$S_{H,d} \leq A_{ef} \cdot f_{c,\alpha,d} = 7.920 \cdot 2{,}22 = 17.553 \text{ N} = 17{,}6 \text{ kN}$$

S_d aus minimalem $S_{H,d}$ in der Kontaktfläche Knagge-Druckstab

$S_d = \dfrac{17{,}6}{\cos 60°} = 35{,}2 \text{ kN}$ dieser Wert ist maßgeblich, siehe weiter unten

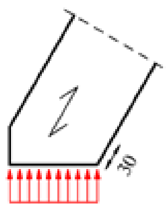
- Maximal aufnehmbare Vertikalkomponente $S_{V,d}$ und S_d (Kontaktfläche Druckstab-Gurt)

$S_{V,d}$ aus Drucknachweis in der Kontaktfläche des Gurtes



$$\alpha = 90°; k_{c,90} = 1{,}5 \rightarrow f_{c,90,d} = 1{,}125 \cdot 2{,}31 = 2{,}60 \text{ N/mm}^2$$
$$A_{ef} = (92 + 2 \cdot 30) \cdot 120 = 18.240 \text{ mm}^2$$
$$S_{V,d} \leq A_{ef} \cdot k_{c,90} \cdot f_{c,90,d} = 18.240 \cdot 2{,}60 = 47.424 \text{ N} = 47{,}4 \text{ kN}$$

$S_{V,d}$ aus Drucknachweis in der Kontaktfläche des Druckstabes



$$\alpha = 30°, k_{c,90} = 1{,}0 \rightarrow f_{c,\alpha,d} = 1{,}125 \cdot 4{,}53 = 5{,}10 \text{ N/mm}^2$$
$$A_{ef} = \left(\underbrace{92 + 30 \cdot \cos 60°}_{107{,}0 \text{ mm}}\right) \cdot 120 = 12.840 \text{ mm}^2$$
$$S_{V,d} \leq A_{ef} \cdot f_{c,\alpha,d} = 12.840 \cdot 5{,}10 = 65.434 \text{ N} = 65{,}4 \text{ kN}$$

S_d aus minimalem $S_{V,d}$ in der Kontaktfläche Druckstab-Gurt

$S_d = \dfrac{47{,}4}{\cos 30°} = 54{,}8 \text{ kN}$ dieser Wert ist nicht maßgeblich

1.3 Entwurf eines zweiseitigen Stabanschlusses durch doppelten Versatz

a) Maximal aufnehmbare Anteile der Stabkraft im Druckstab durch Stirnversatz und Fersenversatz

$$t_{v2} \le h_G / 6 = 240/6 = 40 \text{ mm} \; / \; t_{v1} \le \min\begin{Bmatrix} 0,8 \cdot t_{v2} \\ t_{v2} - 10 \text{ mm} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 0,8 \cdot 40 \\ 40 - 10 \end{Bmatrix} = 30 \text{ mm}$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{2} = 21° \rightarrow f_{c,\alpha,d} = 10,0 \text{ N/mm}^2 \qquad \rightarrow R_{1,d} = \frac{t_{v1} \cdot b \cdot f_{c,\alpha,d}}{\cos^2 \alpha} = \frac{30 \cdot 160 \cdot 10,0}{\cos^2 21°} = 55.070 \text{ N}$$

$$\alpha = \gamma = 42° \rightarrow f_{c,d} = f_{c,\alpha,d} = 5,79 \text{ N/mm}^2 \qquad \rightarrow R_{2,d} = \frac{t_{v2} \cdot b \cdot f_{c,d}}{\cos \alpha} = \frac{40 \cdot 160 \cdot 5,79}{\cos 42°} = 49.860 \text{ N}$$

$$\frac{S_d}{R_{1,d} + R_{2,d}} \le 1 \rightarrow S_d \le R_{1,d} + R_{2,d} = 104.930 \text{ N} = 105 \text{ kN}$$

<u>Berechnung und Nachweis der erforderlichen Vorholzlängen l_{v1} und l_{v2}</u>

$$\text{erf } l_{v1} = \frac{R_{1,d} \cdot \cos\gamma}{b \cdot k_{cr} \cdot f_{v,d}} = \frac{55.070 \cdot \cos 42°}{160 \cdot 1,23} = 208 \text{ mm}$$

$$\frac{\text{erf } l_{v1}}{8 \cdot t_{v1}} = \frac{208}{8 \cdot 30} = 0,87 < 1$$

$$l_{v1} = 210 \text{ mm gewählt}$$

$$\text{erf } l_{v2} = \frac{S_d \cdot \cos\gamma}{b \cdot k_{cr} \cdot f_{v,d}} = \frac{104.930 \cdot \cos 42°}{160 \cdot 1,23} = 396 \text{ mm}$$

$$\frac{\text{erf } l_{v2}}{8 \cdot t_{v2}} = \frac{396}{8 \cdot 40} = 1,239 > 1 \rightarrow \text{unzulässig}$$

Die Tragfähigkeit ist also geringer: $\max S_d = \frac{104.930}{1,239} = 84.690 \text{ N}$

$$\text{erf } l_{v2} = \frac{S_d \cdot \cos\gamma}{b \cdot f_{v,d}} = \frac{84.690 \cdot \cos 42°}{160 \cdot 1,23} = 320 \text{ mm} \rightarrow \frac{\text{erf } l_{v2}}{8 \cdot t_{v2}} = \frac{320}{8 \cdot 40} = 1$$

b) Wie groß muss das Maß l_{v1} mindestens sein?

die Gesamtlänge des Einschnittes in das Last aufnehmende Holz beträgt:

$$L = \frac{h_D}{\sin\gamma} = \frac{160}{\sin 42°} = 239 \text{ mm}$$

der Abstand zwischen den Versatzeinschnitten für Fersen- und Stirnversatz beträgt

$$a = L - t_{v2} \cdot \cot\gamma - t_{v1} \cdot \tan\frac{\gamma}{2} = 239 - 40 \cdot \cot 42° - 30 \cdot \tan 21° = 183 \text{ mm}$$

zwei Bedingungen müssen eingehalten werden: $l_{v1} \ge \text{erf } l_{v1}$ und $(l_{v2} = l_{v1} + a) \ge \text{erf } l_{v2}$

$$\left.\begin{matrix} l_{v1} \ge \text{erf } l_{v1} = 208 \text{ mm} \rightarrow \text{gewählt: } l_{v1} = 210 \text{ mm} \\ l_{v2} = l_{v1} + a = 210 + 183 = 393 \text{ mm} > \text{erf } l_{v2} = 320 \text{ mm} \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{beide Bedingungen erfüllt.}$$

c) Nachweis der Tragfähigkeit im Last aufnehmenden vertikalen Zugstab für die maximal anzuschließende Kraft in den Druckstäben

$$f_{t,0,d} = 11,1 \text{ N/mm}^2 \qquad A_n = \left(240 - 2 \cdot \underbrace{40}_{t_{v2}}\right) \cdot 160 = 25.600 \text{ mm}^2$$

$$F_{t,0,d} = 2 \cdot \max S_d \cdot \cos\gamma = 2 \cdot 84.690 \cdot \cos 42° = 125.870 \text{ N}$$

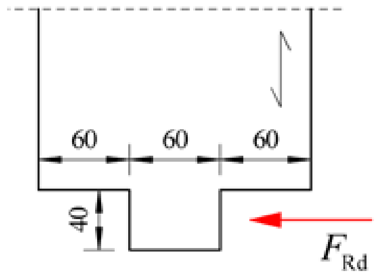
$$\frac{\sigma_{t,0,d}}{f_{t,0,d}} = \frac{\frac{F_{t,0,d}}{A_n}}{f_{t,0,d}} = \frac{\frac{125.870}{25.600}}{11,1} = \frac{4,92}{11,1} = 0,44 < 1$$

1.4 Tragfähigkeit einer Zapfenverbindung

a) Überprüfung der Geometrie und Bestimmung der maximal aufnehmbare Kraft H_d.

Tragfähigkeit des Zapfens

$$\left\{\begin{array}{l} 15\ \mathrm{mm} \le \left[l_\mathrm{Z} = 40\ \mathrm{mm}\right] \le 60\ \mathrm{mm} \\ 1{,}5 \le \left[(h/b) = (180/120) = 1{,}5\right] \le 2{,}5 \\ \left[h_\mathrm{o} = 60\right] \ge \left[h_\mathrm{u} = 60\right] \\ \left[(h_\mathrm{u}/h) = (60/180) = (1/3)\right] \le 1/3 \\ \left[h_\mathrm{Z} = 60\right] \ge \left[(h/6) = (180/6) = 30\right] \end{array}\right\} \rightarrow \text{erfüllt}$$



$$\alpha = h_\mathrm{e}/h = 120/180 = 2/3 \qquad \beta = h_\mathrm{z}/h_\mathrm{e} = 60/120 = 1/2$$

$$k_{90} = \frac{k_\mathrm{n}}{\sqrt{h}\cdot\left(\sqrt{\alpha\cdot(1-\alpha)} + 0{,}8\cdot\frac{x}{h}\cdot\sqrt{\frac{1}{\alpha}-\alpha^2}\right)} = \frac{5{,}0}{\sqrt{180}\cdot\left(\sqrt{\frac{2}{3}\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)} + 0{,}8\cdot\frac{20}{180}\cdot\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)}-\left(\frac{2}{3}\right)^2}\right)} = 0{,}662$$

$$k_\mathrm{v} = \min\left\{\begin{array}{l} 1 \\ k_{90} \end{array}\right\} = 0{,}662$$

$$l_\mathrm{Z,ef} = \min\left\{\begin{array}{l} l_\mathrm{z} + 30\ \mathrm{mm} \\ 2\cdot l_\mathrm{z} \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{l} 40+30 \\ 2\cdot 40 \end{array}\right\} = 70\ \mathrm{mm}$$

$$k_\mathrm{Z} = \beta\cdot\left[1+2\cdot(\beta-1)^2\right]\cdot(2-\alpha) = \tfrac{1}{2}\cdot\left[1+2\cdot\left(\tfrac{1}{2}-1\right)^2\right]\cdot\left(2-\tfrac{2}{3}\right) = 1{,}00$$

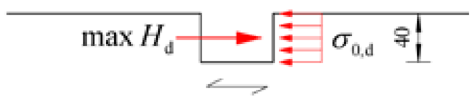
$$k_\mathrm{cr}\cdot f_\mathrm{v,d} = 1{,}125\cdot 1{,}23 = 1{,}38\ \mathrm{N/mm^2} \qquad f_\mathrm{90,d} = 1{,}125\cdot 1{,}54 = 1{,}73\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$F_\mathrm{Rd} = \min\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\cdot b\cdot h_\mathrm{e}\cdot k_\mathrm{Z}\cdot k_\mathrm{v}\cdot k_\mathrm{cr}\cdot f_\mathrm{v,d} \\ 1{,}7\cdot b\cdot l_\mathrm{Z,ef}\cdot f_\mathrm{c,90,d} \end{array}\right\} = \min\left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}\cdot 120\cdot 120\cdot 1{,}00\cdot 0{,}662\cdot 1{,}38 \\ 1{,}7\cdot 120\cdot 70\cdot 1{,}73 \end{array}\right\}$$

$$F_\mathrm{Rd} = \min\left\{\begin{array}{l} 8.770 \\ 24.704 \end{array}\right\} = 8.770\ \mathrm{N} = 8{,}77\ \mathrm{kN} = \max H_\mathrm{d}$$

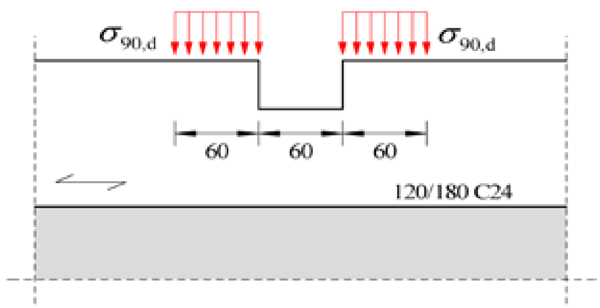
Tragfähigkeit in der Kontaktfläche des Zapfenlochs

$$\frac{\sigma_\mathrm{0,d}}{f_\mathrm{0,d}} = \frac{(8.770/40\cdot 120)}{1{,}125\cdot 12{,}9} = \frac{1{,}83}{14{,}5} = 0{,}13 < 1$$



b) Maximal aufnehmbare Stützendruckraft S_d.

Es wird davon ausgegangen, dass die Hirnholzfläche am Zapfenende nicht in Kontakt zur Schwelle steht, daher wird diese Fläche nicht als tragend angenommen.



Tragfähigkeit der Schwelle

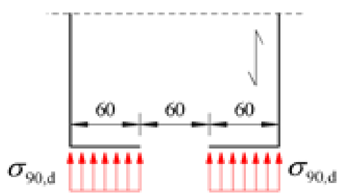
$$A_\mathrm{ef} = 120\cdot(180+2\cdot 30) - \underbrace{120\cdot 60}_{\substack{\text{Hirnholzfläche} \\ \text{des Zapfens}}} = 21.600\ \mathrm{mm^2}$$

$$k_\mathrm{c,90} = 1{,}25 \rightarrow \max S_\mathrm{d} = k_\mathrm{c,90}\cdot f_\mathrm{c,90,d}\cdot A_\mathrm{ef}$$

$$\max S_\mathrm{d} = 1{,}25\cdot 1{,}73\cdot 21.600 = 46.710\ \mathrm{N} = 46{,}7\ \mathrm{kN}$$

Tragfähigkeit der Kontaktfläche am Fuß der Stütze

$$\frac{\sigma_\mathrm{0,d}}{f_\mathrm{0,d}} = \frac{(46.700/2\cdot 60\cdot 120)}{1{,}125\cdot 12{,}9} = \frac{3{,}24}{14{,}5} = 0{,}22 < 1$$



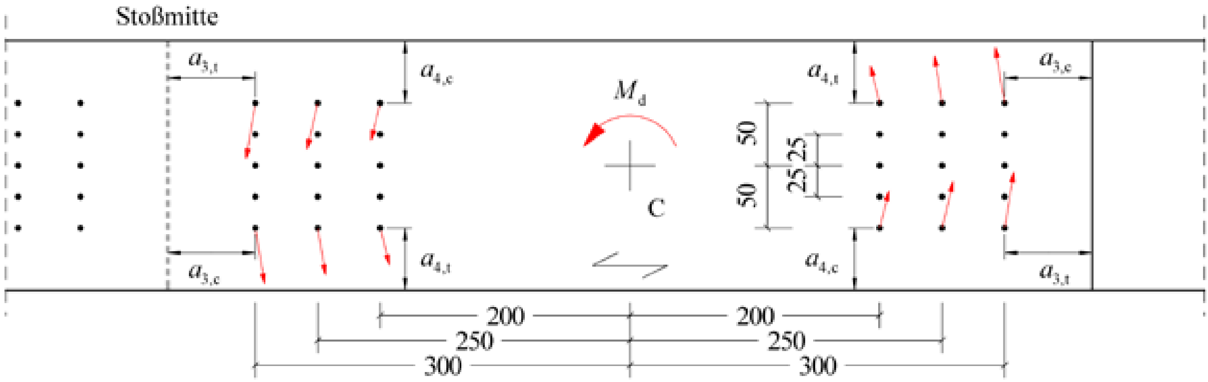
2 Biegesteife Anschlüsse

2.1 Biegesteifer Anschluss mit Nägeln

Überprüfung der Nagelanordnung

Im Mittelholz und in den Laschen kann mit vertretbarem Aufwand keine exakte Abschätzung der Winkel zwischen Kraft- und Faserrichtung geleistet werden. Deshalb werden die Mindestabstände der Nägel jeweils als maximaler Abstand für Winkel $0° \le \alpha \le 90°$ berechnet.

	$0° \le \alpha \le 90°; d = 4{,}6$ mm	Mindestabstand	vorhanden
a_1	$\max\begin{Bmatrix}(5+5\cdot\cos 0°)\cdot d \\ (5+5\cdot\cos 90°)\cdot d\end{Bmatrix} = 10\cdot d$	46,0 mm	50 mm
a_2	$5\cdot d$	23,0 mm	25 mm
$a_{3,t}$	$\max\begin{Bmatrix}(10+5\cdot\cos 0°)\cdot d \\ (10+5\cdot\cos 90°)\cdot d\end{Bmatrix} = 15\cdot d$	69,0 mm	70 mm
$a_{3,c}$	$10\cdot d$	46,0 mm	70 mm $(= a_{3,t})$
$a_{4,t}$	$\max\begin{Bmatrix}(5+2\cdot\sin 0°) \\ (5+2\cdot\sin 90°)\end{Bmatrix}\cdot d = 7\cdot d$	32,2 mm	50 mm
$a_{4,c}$	$5\cdot d$	23,0 mm	50 mm $(= a_{4,t})$



Ermittlung und Nachweis der Nagelbelastung

- aus Moment

$$F_{M,x} = \frac{M_d \cdot y_j}{\sum(x_i^2 + y_i^2)} = \frac{10^7 \cdot 50}{10\cdot(200^2+250^2+300^2)+6\cdot 0^2+12\cdot(25^2+50^2)} = \frac{50\cdot 10^7}{19{,}25\cdot 10^5 + 0{,}375\cdot 10^5}$$

$$F_{M,x} = \frac{50\cdot 10^2}{19{,}625} = 255 \text{ N}$$

$$F_{M,y} = \frac{M_d \cdot x_j}{\sum(x_i^2 + y_i^2)} = \frac{10^7 \cdot 300}{19{,}625\cdot 10^5} = 1.529 \text{ N}$$

- aus Normal- und Querkraft

$$F_N = \frac{N_d}{n} = \frac{0}{30} = 0{,}0 \text{ N}$$

$$F_V = \frac{V_d}{n} = \frac{5.500}{30} = 183 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{(F_{M,x}+F_N)^2 + (F_{M,y}+F_V)^2} = \sqrt{(255+0{,}0)^2 + (1.529+183)^2}$$

$$F = \sqrt{0{,}065\cdot 10^6 + 2{,}931\cdot 10^6} = 1.731 \text{ N}$$

$F_{\mathrm{v,Ed}} = 1.731/2 = 866 \text{ N}$

- Ermittlung des Winkels zwischen Kraft- und Faserrichtung (bei Nägeln nicht erforderlich)

$$\alpha = \arctan \frac{F_{\mathrm{M,y}} + F_{\mathrm{V}}}{F_{\mathrm{M,x}} + F_{\mathrm{N}}} = \arctan \frac{1,529 + 183}{255 + 0,0} = \arctan\left(6,714\right) = 81,5°$$

Nachweis der Nagelbelastung

Überprüfung der Mindestholzdicke in nicht vorgebohrten Nagelverbindungen:

$$t = \max \begin{Bmatrix} 14 \cdot d \\ (13 \cdot d - 30) \cdot \dfrac{\rho_k}{200} \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 14 \cdot 4,6 \\ (13 \cdot 4,6 - 30) \cdot \dfrac{350}{200} \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 64,4 \\ 52,2 \end{Bmatrix} = 64,4 \text{ mm} \rightarrow \text{eingehalten}$$

Bestimmung der Tragfähigkeit eines Nagels

$t_{\mathrm{req}} = 41 \text{ mm} < 120 - 70 = 50 \text{ mm} \rightarrow \text{Mindesteinbindetiefe eingehalten}$

$F_{\mathrm{v,Rd,Joh}} = 892 \text{ N } \left(\text{je Nagel/Scherfuge}\right)$

$$\frac{F_{\mathrm{v,Ed}}}{F_{\mathrm{v,Rd,Joh}}} = \frac{866}{892} = 0,97 < 1 \quad \rightarrow \text{ Nachweis erbracht}$$

Ermittlung und Nachweis der erhöhten Querkraft im Anschlussbereich

$$V_{\mathrm{A,d}} = \frac{|M_{\mathrm{d}}|}{2} \cdot \frac{\sum |x_{\mathrm{i}}|}{\sum x_{\mathrm{i}}^2 + \sum y_{\mathrm{i}}^2} + \frac{|V_{\mathrm{d}}|}{2} = \frac{10^7}{2} \cdot \frac{10 \cdot \left(200 + 250 + 300\right)}{19,625 \cdot 10^5} + \frac{5.500}{2}$$

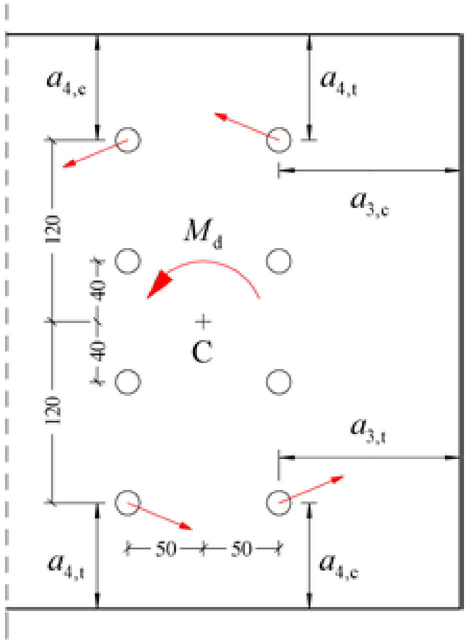
$$V_{\mathrm{A,d}} = 19.108 + 2.750 \approx 21.860 \ N$$

$$\tau_{\mathrm{d}} = 1,5 \cdot \frac{V_{\mathrm{A,d}}}{A} = 1,5 \cdot \frac{21.860}{120 \cdot 200} = 1,366 \text{ N/mm}^2$$

$$k_{\mathrm{cr}} \cdot f_{\mathrm{v,d}} = k_{\mathrm{mod}} \cdot \frac{k_{\mathrm{cr}} \cdot f_{\mathrm{v,k}}}{\gamma_{\mathrm{m}}} = 0,8 \cdot \frac{2,0}{1,3} = 1,23$$

$$\frac{\tau_{\mathrm{d}}}{k_{\mathrm{cr}} \cdot f_{\mathrm{v,d}}} = \frac{1,366}{1,23} = 1,11 > 1 \rightarrow \text{unzulässig}$$

2.2 Biegesteifer Anschluss mit innen liegendem Blech und SDü



Beanspruchung bezogen auf C in der Dübelgruppe links

$$M_d = V_d \cdot e = 26 \cdot 0,25 = 6,5 \text{ kNm} = 6,5 \cdot 10^6 \text{ Nmm}$$

Stabdübelbelastung aus Moment

$$F_{M,x} = \frac{M_d \cdot y_j}{\sum\left(x_i^2 + y_i^2\right)} = \frac{6,5 \cdot 10^6 \cdot 120}{8 \cdot 50^2 + 4 \cdot \left(40^2 + 120^2\right)} = 9.286 \text{ N}$$

$$F_{M,y} = \frac{M_d \cdot x_j}{\sum\left(x_i^2 + y_i^2\right)} = \frac{65 \cdot 10^5 \cdot 50}{0,840 \cdot 10^5} = 3.869 \text{ N}$$

Stabdübelbelastung aus Normal- und Querkraft

$$F_N = \frac{N_d}{n} = \frac{0}{8} = 0,0 \text{ N} \qquad F_V = \frac{V_d}{n} = \frac{26.000}{8} = 3.250 \text{ N}$$

$$F = \sqrt{\left(F_{M,x} + F_N\right)^2 + \left(F_{M,y} + F_V\right)^2} = \sqrt{(9.286 + 0,0)^2 + (3.869 + 3.250)^2} = \sqrt{(9.286)^2 + (7.119)^2}$$

$$F = 11.700 \text{ N}$$

$$F_{v,Ed} = 11.700/2 = 5.850 \text{ N}$$

Winkel zwischen Kraft- und Faserrichtung: $\alpha = \arctan \frac{F_{M,y} + F_V}{F_{M,x} + F_N} = \arctan \frac{7.119}{9.286} = 37,5°$

Ermittlung der Tragfähigkeit der Stabdübel in der Dübelgruppe links für $\alpha = 37,5°$

$$t_{req} = \left(\frac{1}{k_1}\right) \cdot k_2 \cdot \frac{97,8 + 99,8}{2} = \underbrace{\left(\frac{1}{1,042}\right)}_{\text{GL24h}} \cdot \underbrace{1,0}_{\text{S235}} \cdot 98,8 = 94,8 \text{ mm} > 80 \text{ mm} \rightarrow \text{Abminderung}$$

$$F_{V,Rd,Joh} = \frac{t}{t_{req}} \cdot k_1 \cdot k_2 \cdot \frac{9,72 + 9,52}{2} = \left(\frac{80}{94,8}\right) \cdot 1,042 \cdot 1,0 \cdot 9,62 = 8,46 \text{ kN}$$

Nachweis der maximalen Stabdübelbelastung mit $\left(n_{ef}/n\right)$ für $\alpha = 37,5°$ und $a_1 = 100$ mm

$$n_{ef,\alpha=0°} = \min\left\{n\ ;\ n^{0,9} \cdot \sqrt[4]{\frac{a_1}{13 \cdot d}}\right\} = \min\left\{2\ ;\ 2^{0,9} \cdot \sqrt[4]{\frac{100}{13 \cdot 16}}\right\} = 1,554 \qquad n_{ef,\alpha=90°} = n = 2$$

$$n_{ef,\alpha=37,5°} = 1,554 + (37,5/90) \cdot (2 - 1,554) = 1,740 \rightarrow \left(n_{ef}/n\right) = 0,870$$

$$\frac{F_{v,Ed}}{F_{v,Rd}} = \frac{5.850}{8.460} = 0,69 < 1 \quad \text{und} \quad \frac{F_{v,Ed} \cdot \cos\alpha}{\left(n_{ef}/n\right) \cdot F_{v,Rd}} = \frac{5.850 \cdot \cos 37,5°}{0,870 \cdot 8.460} = 0,63 < 1$$

Überprüfung der Stabdübelanordnung in der Dübelgruppe links (der Winkel zwischen Kraft- und Faserrichtung variiert von SDü zu SDü):

	$0° \le \alpha \le 90°; d = 16$ mm	Mindestabstand	vorhanden
a_1	$(3+2\cdot\cos\alpha)\cdot d = 5\cdot d$	80 mm	100 mm
a_2	$3\cdot d$	48 mm	80 mm
$a_{3,t}$	$\max\{7\cdot d; 80\text{ mm}\}$	112 mm	120 mm
$a_{3,c}$	$---$	$---$	$---$
$a_{4,t}$	$\max\{(2+2\cdot\sin\alpha)\cdot d; 3\cdot d\} = 4\cdot d$	64 mm	70
$a_{4,c}$	$---$	$---$	$---$

Ermittlung und Nachweis der erhöhten Querkraft im Anschlussbereich

$$V_{\mathrm{A,d}} = \frac{|M_\mathrm{d}|}{2}\cdot\frac{\sum|x_i|}{\sum x_i^2+\sum y_i^2}+\frac{|V_d|}{2} = \frac{6,5\cdot10^6}{2}\cdot\frac{8\cdot50}{0,84\cdot10^5}+\frac{26.000}{2} = 15.476+13.000 = 28.476\text{ N}$$

$$\tau_\mathrm{d}=1,5\cdot\frac{V_{\mathrm{A,d}}}{A} = 1,5\cdot\frac{28.476}{(170-10)\cdot380} = 0,703\text{ N/mm}^2 \quad k_\mathrm{cr}\cdot f_\mathrm{v,d} = k_\mathrm{mod}\cdot\frac{k_\mathrm{cr}\cdot f_\mathrm{v,k}}{\gamma_\mathrm{m}} = 0,8\cdot\frac{2,5}{1,3} = 1,54$$

$$\frac{\tau_\mathrm{d}}{k_\mathrm{cr}\cdot f_\mathrm{v,d}} = \frac{0,703}{1,54} = 0,46 < 1$$

Nachweis der Dübelverbindung in der Stütze (rechte Gruppe)

	$\alpha = 0°; d = 16$ mm	Mindestabstand	vorhanden
a_1	$(3+2\cdot\cos\alpha)\cdot d = 5\cdot d$	80 mm	80 mm
a_2	$---$	$---$	$---$
$a_{3,t}$	$---$	$---$	$---$
$a_{3,c}$	$---$	$---$	$---$
$a_{4,t}$	$---$	$---$	$---$
$a_{4,c}$	$3\cdot d$	48 mm	80

Tragfähigkeit in der Dübelgruppe rechts für $\alpha = 0°$

$$t_\mathrm{req} = \left(\frac{1}{k_1}\right)\cdot k_2\cdot 89,5 = \underbrace{\left(\frac{1}{1,042}\right)}_{\mathrm{GL24h}}\cdot\underbrace{1,0}_{\mathrm{S235}}\cdot 89,5 = 85,9\text{ mm} > 80\text{ mm} \rightarrow$$ Abminderung

$$F_\mathrm{V,Rd,Joh} = \frac{t}{t_\mathrm{req}}\cdot k_1\cdot k_2\cdot 10,62 = \left(\frac{80}{85,9}\right)\cdot 1,042\cdot 1,0\cdot 10,62 = 10,3\text{ kN}$$

$$F_\mathrm{v,Ed} = \frac{26.000}{4\cdot2} = 3.250\text{ N}$$

$$\frac{F_\mathrm{v,Ed}}{F_\mathrm{v,Rd}} = \frac{3.250}{10.300} = 0,32 < 1$$ und $$\frac{F_\mathrm{v,Ed}\cdot\cos\alpha}{(n_\mathrm{ef}/n)\cdot F_\mathrm{v,Rd}} = \frac{3.250\cdot\cos0°}{0,686\cdot10.300} = 0,46 < 1$$

3 Gebrauchstauglichkeit

3.1 Gebrauchstauglichkeitsnachweis an einem Balken auf zwei Stützen

Zunächst muss die Anfangsdurchbiegung in der Mitte des Trägers nach PvK berechnet werden. Hierzu werden die Momentenverläufe zu Gleichlast q, Einzellast F und zum virtuellen Kraftzustand $\bar{1}$ ermittelt, siehe Abb. 3-1.

Querschnittswerte:

$I = I_{\text{Träger}} = \frac{140 \cdot 240^3}{12} = 161{,}28 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \qquad A = A_{\text{Stütze}} = 140^2 = 19{,}6 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \qquad E_{0,\text{mean}} = 12.000 \text{ N/mm}^2$

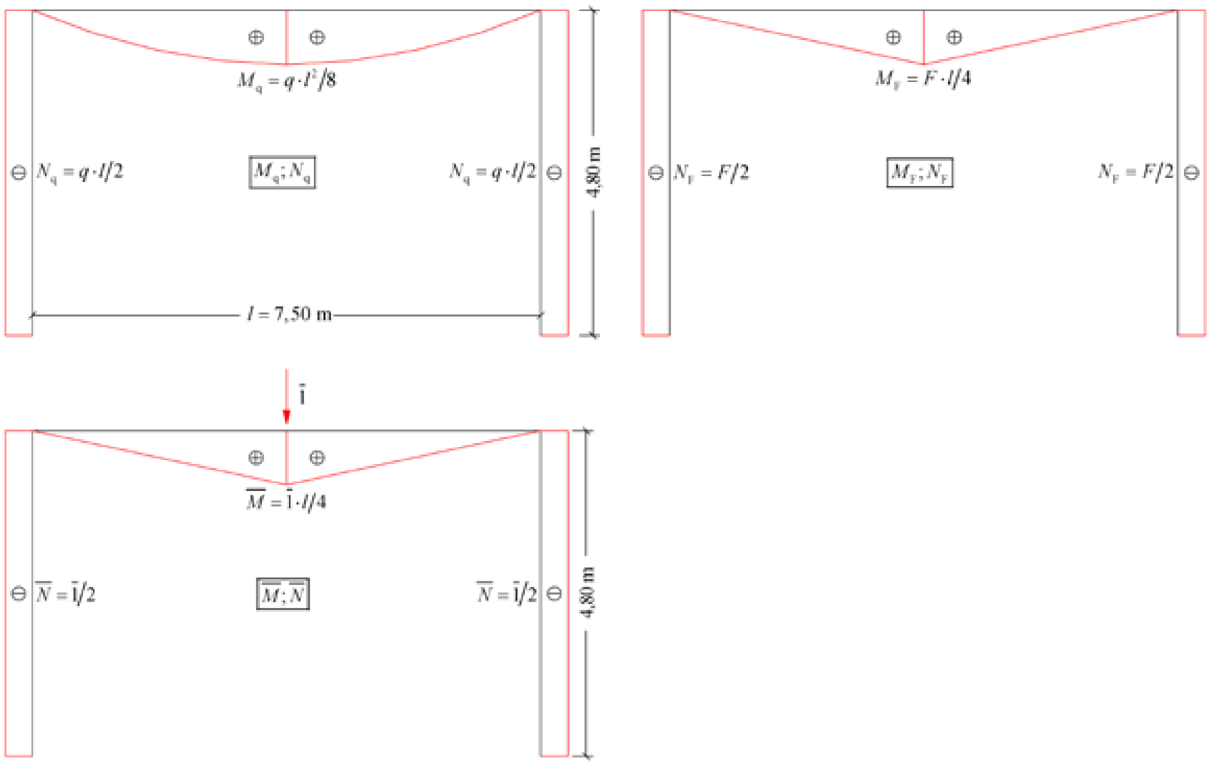


Abb. 3-1 Momenten- und Normalkraftverläufe aus vorhandener Belastung und virtueller Last

Vorhandene Last		M	Werte
Eigengewicht	$q_{G,k} = 0{,}3$ kN/m	$M_q = q \cdot l^2/8$	$M_q = 0{,}3 \cdot 7.500^2/8 = 2{,}109 \cdot 10^6$ Nmm
		$N_q = q \cdot l/2$	$N_q = 0{,}3 \cdot 7.500/2 = 1{,}125 \cdot 10^3$ N
Verkehr	$q_{Q,k} = 0{,}5$ kN/m	$M_q = q \cdot l^2/8$	$M_q = 0{,}5 \cdot 7.500^2/8 = 3{,}516 \cdot 10^6$ Nmm
		$N_q = q \cdot l/2$	$N_q = 0{,}5 \cdot 7.500/2 = 1{,}875 \cdot 10^3$ N
	$F_{Q,k} = 1{,}4$ kN	$M_F = F \cdot l/4$	$M_F = 1.400 \cdot 7.500/4 = 2{,}625 \cdot 10^6$ Nmm
		$N_F = F/2$	$N_F = 1.400/2 = 0{,}7 \cdot 10^3$ N
Virtuelle Last		$\bar{M}$	Werte
$F = \bar{1}$		$\bar{M} = \bar{1} \cdot l/4$	$\bar{M} = \bar{1} \cdot 7.500/4 = 1{,}875 \cdot 10^3$ mm
		$\bar{N} = \bar{1}/2$	$\bar{N} = 0{,}5$

<u>Berechnung der Anfangsdurchbiegung mit PvK</u>

Durchbiegungsanteil aus q : $w_q = \frac{M_q \cdot \overline{M}}{2,4 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \cdot 7.500 + 2 \cdot \frac{N_q \cdot \overline{N}}{E_{0,mean} \cdot A} \cdot 4.800$

Durchbiegungsanteil aus F : $w_F = \frac{M_F \cdot \overline{M}}{3 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \cdot 7.500 + 2 \cdot \frac{N_F \cdot \overline{N}}{E_{0,mean} \cdot A} \cdot 4.800$

Anfangsdurchbiegung aus ständigen Einwirkungen $q_{G,k} = 0,3$ kN/m

$$w_{inst,G} = w_q = \underbrace{\frac{2,109 \cdot 10^6 \cdot 1,875 \cdot 10^3}{2,4 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \cdot 7.500}_{\text{aus Durchbiegung Träger}} + \underbrace{2 \cdot \frac{1,125 \cdot 10^3 \cdot 0,5}{E_{0,mean} \cdot A} \cdot 4.800}_{\text{aus Verkürzung Stützen}}$$

$$w_{inst,G} = \frac{2,109 \cdot \cancel{10^6} \cdot 1,875 \cdot \cancel{10^3} \cdot 7,5 \cdot 10^3}{2,4 \cdot 12,0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 161,28 \cdot \cancel{10^6}} + \cancel{2} \cdot \frac{1,125 \cdot \cancel{10^3} \cdot \cancel{0,5} \cdot 4,8 \cdot \cancel{10^3}}{12,0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 19,6 \cdot \cancel{10^3}}$$

$$w_{inst,G} = \underbrace{6,38}_{\text{aus Durchbiegung Träger}} + \underbrace{0,02}_{\text{aus Verkürzung Stützen, Anteil vernachlässigbar!}} = 6,4 \text{ mm}$$

Anfangsdurchbiegung aus Verkehr $q_{Q,k} = 0,5$ kN/m und $F_{Q,k} = 1,4$ kN

$w_q = \frac{0,5}{0,3} \cdot 6,4 = 10,67$ mm (wenn Belastung q von $0,3$ kN/m auf $0,5$ kN/m erhöht wird steigt die Durchbiegung entsprechend)

$$w_F = \frac{M_F \cdot \overline{M}}{3 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \cdot 7.500 \underbrace{+ \cancel{2 \cdot \frac{N_F \cdot \overline{N}}{E_{0,mean} \cdot A} \cdot 4.800}}_{\text{aus Verkürzung Stützen, Anteil vernachlässigbar!}} = \frac{2,625 \cdot \cancel{10^6} \cdot 1,875 \cdot \cancel{10^3}}{3 \cdot 12,0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 161,28 \cdot \cancel{10^6}} \cdot 7,5 \cdot 10^3 = 6,36 \text{ mm}$$

$$w_{inst,Q,1} = w_q + w_F = 10,67 + 6,36 = 17,03 \approx 17 \text{ mm}$$

<u>Alternative Berechnung der Anfangsdurchbiegungen mit Hilfe von Standardwerken</u>

Der Anteil aus der Verkürzung der Stützen wird vernachlässigt.

Durchbiegungsanteil aus q : $w_q = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E_{0,mean} \cdot I}$

Durchbiegungsanteil aus F : $w_F = \frac{F \cdot l^3}{48 \cdot E_{0,mean} \cdot I}$

Anfangsdurchbiegung $w_{G,inst}$ aus ständigen Einwirkungen $q_{G,k} = 0,3$ kN/m

$$w_{inst,G} = w_q = \frac{5 \cdot 0,3 \cdot 7,5^4 \cdot \cancel{10^{12}}}{384 \cdot 12,0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 0,16128 \cdot \cancel{10^9}} = 6,38 \approx 6,4 \text{ mm}$$

Anfangsdurchbiegung $w_{Q,1,inst}$ aus Verkehr $q_{Q,k} = 0,5$ kN/m und $F_{Q,k} = 1,4$ kN

$$w_q = \frac{0,5}{0,3} \cdot 6,4 = 10,67 \text{ mm}$$

$$w_F = \frac{1,4 \cdot \cancel{10^3} \cdot 7,5^3 \cdot \cancel{10^9}}{48 \cdot 12,0 \cdot \cancel{10^3} \cdot 0,16128 \cdot \cancel{10^9}} = 6,36 \text{ mm}$$

$$w_{inst,Q,1} = w_q + w_F = 10,67 + 6,36 = 17,03 \approx 17 \text{ mm}$$

<u>Gebrauchstauglichkeitsnachweis bei einer veränderlichen Einwirkung, keine Überhöhung</u>

Verformungsbeiwert für C30 bei NKL 1 $k_{def} = 0,6$

Wohn-, Aufenthalts- und Büroräume, Kategorie A, B $\psi_{0,1} = 0,7$ $\psi_{2,1} = 0,3$

a) Anfangsdurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination:

$$w_{inst} = w_{inst,G} + w_{inst,Q,1} + \sum_{i=2}^{n} \left(\psi_{0,i} \cdot w_{inst,Q,i} \right) = 6,4 + 17 = 23,4 \text{ mm} < \frac{7.500}{300} = 25 \text{ mm}$$

b) Enddurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination:

$$w_{\mathrm{fin}} = w_{\mathrm{inst}} + \left(w_{\mathrm{inst,G}} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{2,\mathrm{i}} \cdot w_{\mathrm{inst,Q,i}} \right) \cdot k_{\mathrm{def}} = 23,4 + (6,4 + 0,3 \cdot 17) \cdot 0,6 = 30,3 < \frac{7.500}{200} = 37,5 \text{ mm}$$

c) Enddurchbiegung aus der quasi-ständigen Lastkombination:

$$w_{\mathrm{net,fin}} = \left(w_{\mathrm{inst,G}} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{2,\mathrm{i}} \cdot w_{\mathrm{inst,Q,i}} \right) \cdot (1 + k_{\mathrm{def}}) - w_{\mathrm{c}} = (6,4 + 0,3 \cdot 17) \cdot (1 + 0,6) = 18,4 < \frac{7.500}{300} = 25 \text{ mm}$$

3.2 Gebrauchstauglichkeitsnachweis an einem Kragbalken

Zunächst wird die Anfangsdurchbiegung am Ende des Kragbalkens nach PvK berechnet. Hierzu werden die Momentenverläufe zu Gleichlast q, Einzellast F und zum virtuellen Kraftzustand $\bar{1}$ ermittelt, siehe Abb. 3-2.

Querschnittswerte: $I = \dfrac{240 \cdot 480^3}{12} = 2{,}212 \cdot 10^9 \text{ mm}^4$ $\qquad E_{0,\text{mean}} = 12.600 \text{ N/mm}$

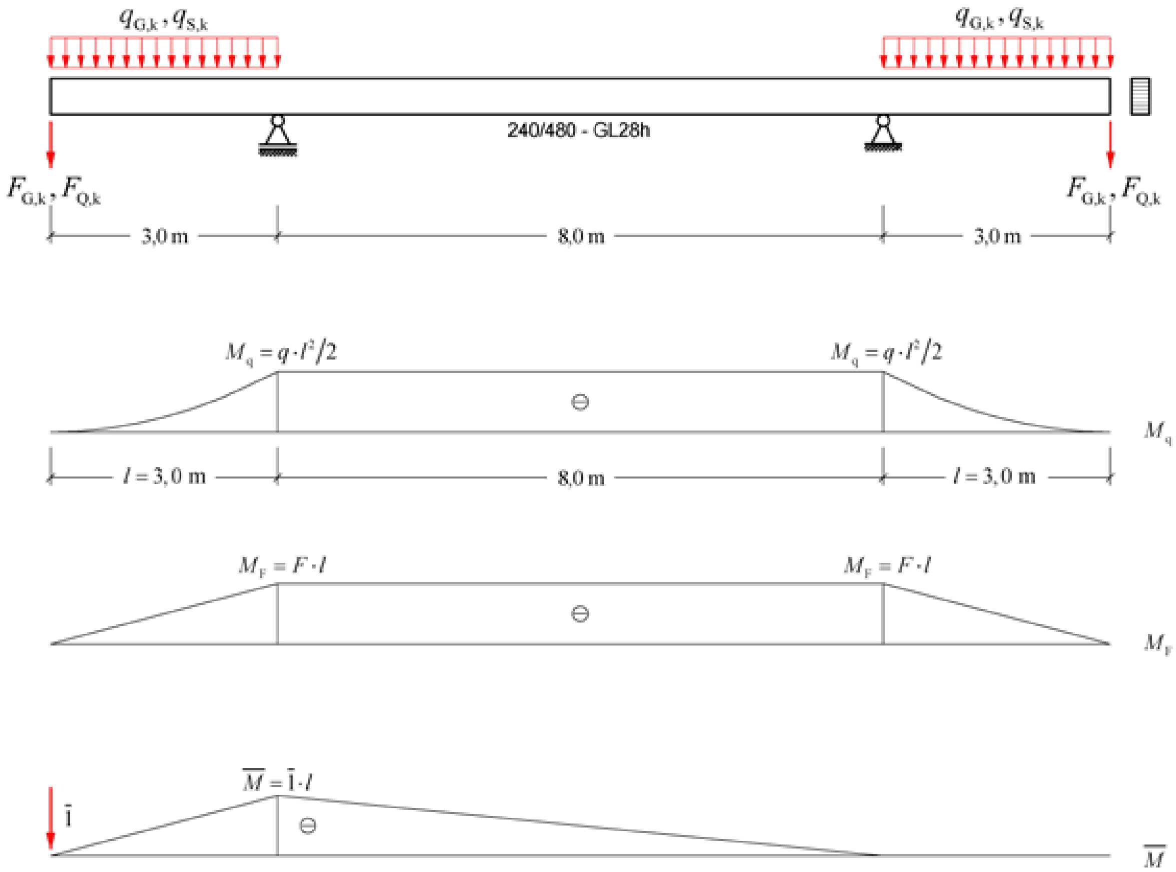


Abb. 3-2 Momentenverläufe aus vorhandener Belastung und virtueller Last

Vorhandene Last		M	Werte in $[\text{Nmm}]$
Eigengewicht	$q_{G,k} = 2{,}0$ kN/m	$M_q = q_{G,k} \cdot l^2/2$	$M_q = 2{,}0 \cdot 3.000^2/2 = 9 \cdot 10^6$
	$F_{G,k} = 3{,}0$ kN	$M_F = F_{G,k} \cdot l$	$M_F = 3.000 \cdot 3.000 = 9 \cdot 10^6$
Schnee	$q_{S,k} = 6{,}6$ kN/m	$M_q = q_{S,k} \cdot l^2/2$	$M_q = 6{,}6 \cdot 3.000^2/2 = 29{,}7 \cdot 10^6$
Verkehr	$F_{Q,k} = 4{,}5$ kN	$M_F = F_{Q,k} \cdot l$	$M_F = 4.500 \cdot 3.000 = 13{,}5 \cdot 10^6$
Virtuelle Last		$\overline{M}$	Werte in $[\text{mm}]$
$F = \bar{1}$		$\overline{M} = \bar{1} \cdot l$	$\overline{M} = \bar{1} \cdot 3.000 = 3 \cdot 10^3$

<u>Berechnung der Anfangsdurchbiegung mit PvK</u>

Durchbiegungsanteil aus q

$$w_q = \frac{M_q \cdot \overline{M}}{4 \cdot E_{0,\text{mean}} \cdot I} \cdot 3.000 + \frac{M_q \cdot \overline{M}}{2 \cdot E_{0,\text{mean}} \cdot I} \cdot 8.000 = \frac{M_q \cdot \overline{M}}{E_{0,\text{mean}} \cdot I} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{8}{2}\right) \cdot 10^3 = 4{,}75 \cdot 10^3 \cdot \frac{M_q \cdot \overline{M}}{E_{0,\text{mean}} \cdot I}$$

Durchbiegungsanteil aus F

$$w_F = \frac{M_F \cdot \overline{M}}{3 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \cdot 3.000 + \frac{M_F \cdot \overline{M}}{2 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \cdot 8.000 = \frac{M_F \cdot \overline{M}}{E_{0,mean} \cdot I} \cdot \left(\frac{3}{3} + \frac{8}{2}\right) \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^3 \cdot \frac{M_F \cdot \overline{M}}{E_{0,mean} \cdot I}$$

Anfangsdurchbiegung $w_{G,inst}$ aus ständigen Einwirkungen $q_{G,k} = 2,0\ \text{kN/m}$ und $F_{G,k} = 3,0\ \text{kN}$

$$w_{inst,G} = \underbrace{4,75 \cdot 10^3 \cdot \frac{M_q \cdot \overline{M}}{E_{0,mean} \cdot I}}_{\text{aus } q_{G,k}=2,0\ \text{kN/m}} + \underbrace{5 \cdot 10^3 \cdot \frac{M_F \cdot \overline{M}}{E_{0,mean} \cdot I}}_{\text{aus } F_{G,k}=3,0\ \text{kN}}$$

$$w_{inst,G} = \frac{4,75 \cdot \cancel{10^3} \cdot 9 \cdot \cancel{10^6} \cdot 3 \cdot \cancel{10^3}}{12,6 \cdot \cancel{10^3} \cdot 2,212 \cdot \cancel{10^9}} + \frac{5 \cdot \cancel{10^3} \cdot 9 \cdot \cancel{10^6} \cdot 3 \cdot \cancel{10^3}}{12,6 \cdot \cancel{10^3} \cdot 2,212 \cdot \cancel{10^9}} = \underbrace{4,60}_{\text{aus } q_{G,k}=2,0\ \text{kN/m}} + \underbrace{4,84}_{\text{aus } F_{G,k}=3,0\ \text{kN}} = 9,4\ \text{mm}$$

Anfangsdurchbiegung $w_{Q,1,inst}$ aus Schneelast $q_{S,k} = 6,6\ \text{kN/m}$

$$w_{inst,Q,1} = \frac{6,6}{2,0} \cdot 4,60 = 15,2\ \text{mm}$$

(wenn Belastung q von $2,0\ \text{kN/m}$ auf $6,6\ \text{kN/m}$ erhöht wird steigt die Durchbiegung entsprechend)

Anfangsdurchbiegung $w_{Q,2,inst}$ aus Verkehr $F_{Q,k} = 4,5\ \text{kN}$

$$w_{inst,Q,2} = \frac{4,5}{3,0} \cdot 4,84 = 7,3\ \text{mm}$$

(wenn Belastung F von $3,0\ \text{kN}$ auf $4,5\ \text{kN}$ erhöht wird steigt die Durchbiegung entsprechend)

<u>Alternative Berechnung der Anfangsdurchbiegungen mit Hilfe von Standardwerken</u>

Zur Berechnung der Durchbiegung am Ende des Kragträgers werden zwei Anteile ermittelt:

1. Der Anteil w_φ aus der Verdrehung der Balkenachse an den Auflagern. Diese Verdrehung entsteht durch die Krümmung des Balkenabschnittes mit der Länge l_2 zwischen den Auflagern infolge des konstanten Momentenverlaufs (Abb. 3-3, obere Skizze).
2. Der Anteil aus der Biegung im Kragarm mit der Länge l_1 (Abb. 3-3, untere Skizze).

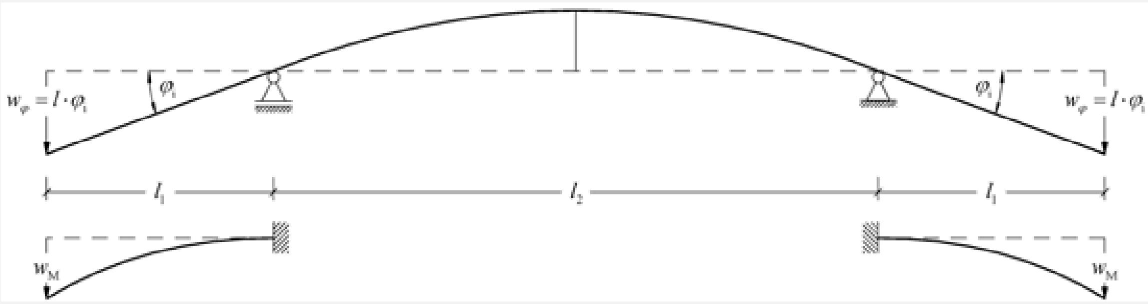


Abb. 3-3 Durchbiegungsanteile am Kragarm

Durchbiegungsanteil aus q

$$\varphi = \frac{(2 \cdot M_q + M_q) \cdot l_2}{6 \cdot E_{0,mean} \cdot I} = \frac{3 \cdot M_q \cdot l_2}{6 \cdot E_{0,mean} \cdot I} = \frac{M_q \cdot l_2}{2 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \qquad \text{(siehe Schneider/Wendehorst)}$$

$$w_\varphi = l_1 \cdot \varphi = \frac{M_q \cdot l_1 \cdot l_2}{2 \cdot E_{0,mean} \cdot I}$$

$$w_M = \frac{q \cdot l_1^4}{8 \cdot E_{0,mean} \cdot I} \qquad \text{(siehe Schneider/Wendehorst)}$$

$$w_q = w_\varphi + w_M = \left(\frac{M_q \cdot l_1 \cdot l_2}{2} + \frac{q \cdot l_1^4}{8}\right) \cdot \frac{1}{E_{0,mean} \cdot I}$$

Durchbiegungsanteil aus F

$$w_\varphi = l_1 \cdot \varphi = \frac{M_\mathrm{F} \cdot l_1 \cdot l_2}{2 \cdot E_{0,\mathrm{mean}} \cdot I} \quad \text{(wie zuvor)}$$

$$w_\mathrm{M} = \frac{F \cdot l_1^3}{3 \cdot E_{0,\mathrm{mean}} \cdot I} \quad \text{(siehe Schneider/Wendehorst)}$$

$$w_\mathrm{F} = w_\varphi + w_\mathrm{M} = \left(\frac{M_\mathrm{F} \cdot l_1 \cdot l_2}{2} + \frac{F \cdot l_1^3}{3} \right) \cdot \frac{1}{E_{0,\mathrm{mean}} \cdot I}$$

Anfangsdurchbiegung $w_\mathrm{G,inst}$ aus ständigen Einwirkungen $q_\mathrm{G,k}$ und $F_\mathrm{G,k}$

$$w_\mathrm{inst,G} = \underbrace{\left(\frac{M_\mathrm{q} \cdot l_1 \cdot l_2}{2} + \frac{q \cdot l_1^4}{8} \right) \cdot \frac{1}{E_{0,\mathrm{mean}} \cdot I}}_{w_\mathrm{q} \text{ aus } q_\mathrm{G,k} = 2{,}0 \text{ kN/m}} + \underbrace{\left(\frac{M_\mathrm{F} \cdot l_1 \cdot l_2}{2} + \frac{F \cdot l_1^3}{3} \right) \cdot \frac{1}{E_{0,\mathrm{mean}} \cdot I}}_{w_\mathrm{F} \text{ aus } F_\mathrm{G,k} = 3{,}0 \text{ kN}}$$

$$w_\mathrm{inst,G} = \left(\frac{9 \cdot \cancel{10^6} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cancel{10^6}}{2} + \frac{2{,}0 \cdot 3^4 \cdot \cancel{10^{12}}}{8} \right) \cdot \frac{1}{12{,}6 \cdot \cancel{10^3} \cdot 2{,}212 \cdot \cancel{10^9}}$$

$$+ \left(\frac{9 \cdot \cancel{10^6} \cdot 3 \cdot 8 \cdot \cancel{10^6}}{2} + \frac{3 \cdot \cancel{10^3} \cdot 3^3 \cdot \cancel{10^9}}{3} \right) \cdot \frac{1}{12{,}6 \cdot \cancel{10^3} \cdot 2{,}212 \cdot \cancel{10^9}}$$

$$w_\mathrm{inst,G} = w_\mathrm{q} + w_\mathrm{F} = \underbrace{4{,}60}_{w_\mathrm{q} \text{ aus } q_\mathrm{G,k} = 2{,}0 \text{ kN/m}} + \underbrace{4{,}84}_{w_\mathrm{F} \text{ aus } F_\mathrm{G,k} = 3{,}0 \text{ kN}} = 9{,}4 \text{ mm}$$

Anfangsdurchbiegung $w_\mathrm{inst,Q,1}$ aus Schneelast $q_\mathrm{S,k} = 6{,}6$ kN/m : $w_\mathrm{inst,Q,1} = \frac{6{,}6}{2{,}0} \cdot 4{,}60 = 15{,}2$ mm

Anfangsdurchbiegung $w_\mathrm{inst,Q,2}$ aus Verkehr $F_\mathrm{Q,k} = 4{,}5$ kN : $w_\mathrm{inst,Q,2} = \frac{4{,}5}{3{,}0} \cdot 4{,}84 = 7{,}3$ mm

<u>Gebrauchstauglichkeitsnachweis bei mehreren veränderlichen Einwirkungen, Träger überhöht</u>

Verformungsbeiwert für GL 28h bei NKL 1	$k_\mathrm{def} = 0{,}6$	
Schnee- und Eislasten über NN + 1000 m	$\psi_{0,1} = 0{,}7$	$\psi_{2,1} = 0{,}2$
Versammlungs- und Verkaufsräume, Kategorie C, D	$\psi_{0,2} = 0{,}7$	$\psi_{2,2} = 0{,}6$

a) Anfangsdurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination:

$$w_\mathrm{inst} = w_\mathrm{inst,G} + w_\mathrm{inst,Q,1} + \sum_{i=2}^{n} \left(\psi_\mathrm{0,i} \cdot w_\mathrm{inst,Q,i} \right)$$

$$w_\mathrm{inst} = 9{,}4 + 15{,}2 + 0{,}7 \cdot 7{,}3 = 29{,}7 < \frac{3.000}{100} = 30 \text{ mm}$$

b) Enddurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination:

$$w_\mathrm{fin} = w_\mathrm{inst} + \left(w_\mathrm{inst,G} + \sum_{i=1}^{n} \psi_\mathrm{2,i} \cdot w_\mathrm{inst,Q,i} \right) \cdot k_\mathrm{def}$$

$$w_\mathrm{fin} = 29{,}7 + \left(9{,}4 + 0{,}2 \cdot 15{,}2 + 0{,}6 \cdot 7{,}3 \right) \cdot 0{,}6 = 39{,}8 < \frac{3.000}{75} = 40 \text{ mm}$$

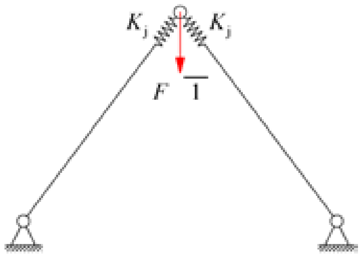
c) Enddurchbiegung aus der quasi-ständigen Lastkombination:

$$w_\mathrm{net,fin} = \left(w_\mathrm{inst,G} + \sum_{i=1}^{n} \psi_\mathrm{2,i} \cdot w_\mathrm{inst,Q,i} \right) \cdot \left(1 + k_\mathrm{def} \right) - w_\mathrm{c}$$

$$w_\mathrm{net,fin} = \left(9{,}4 + 0{,}2 \cdot 15{,}2 + 0{,}6 \cdot 7{,}3 \right) \cdot \left(1 + 0{,}6 \right) - 20 = 7 \text{ mm} < \frac{3.000}{125} = 24 \text{ mm}$$

4 Verformungsberechnung von Balken- und Fachwerktragwerken nach PvK

4.1 Bock mit eingeschlitztem Blech und Stabdübeln



Stabkräfte aus ständiger und veränderlicher Last sowie aus virtueller Kraft $\overline{1}$

$N_G = -62,5$ kN $\qquad N_Q = -81,25$ kN

$\overline{N} = -0,625$

Federsteifigkeit aus 9 SDü mit je 2 Scherflächen in GL28h

$$K_{ser} = 2 \cdot 5.775 = 11.550 \rightarrow K_j = n \cdot m \cdot K_{ser} = 9 \cdot 2 \cdot 11.550 = 207.900 \text{ N/mm}$$

Anfangsverformung aus ständiger Last ($M = 0$ und $Q = 0$)

$$w_{inst,G} = \sum_i \frac{S_i \cdot \overline{S_i}}{E_{0,mean} \cdot A} \cdot l_i + \sum_k \frac{S_k \cdot \overline{S_k}}{K_j}$$

$$w_{inst,G} = 2 \cdot \frac{-62,5 \cdot 10^3 \cdot (-0,625)}{12,6 \cdot 10^3 \cdot 200^2} \cdot 5,0 \cdot 10^3 + 2 \cdot \frac{-62,5 \cdot 10^3 \cdot (-0,625)}{207,9 \cdot 10^3}$$

$$w_{inst,G} = 0,78 + 0,38 = 1,15 \text{ mm}$$

Anfangsverformung aus veränderlicher Last

$$w_{inst,Q,1} = \frac{130}{100} \cdot 1,15 \text{ mm} = 1,50 \text{ mm}$$

Beiwerte: $k_{def} = 0,6$ und $\psi_{2,1} = 0,8$

<u>Nachweis</u>

a) Anfangsdurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination: $w_{inst} \le \frac{l}{300}$

$$w_{inst} = w_{inst,G} + w_{inst,Q,1} + \sum_{i=2}^{n} \left(\psi_{0,i} \cdot w_{inst,Q,i} \right) = 1,15 + 1,50 = 2,65 \text{ mm} < \frac{6.000}{300} = 20 \text{ mm}$$

b) Enddurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination: $w_{fin} \le \frac{l}{200}$

Da das Tragwerk ausschließlich Stahlblech-Holzverbindungen aufweist, können die Endverformungen vereinfacht nachgewiesen werden, da alle Verformungsbeiwerte k_{def} gleich groß sind.

$$w_{fin} = w_{inst} + \left(w_{inst,G} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{2,i} \cdot w_{inst,Q,i} \right) \cdot k_{def}$$

$$= 2,65 + (1,15 + 0,8 \cdot 1,50) \cdot 0,6 = 4,06 \text{ mm} < \frac{6.000}{200} = 30 \text{ mm}$$

c) Enddurchbiegung aus der quasi-ständigen Lastkombination: $w_{net,fin} \le \frac{l}{300}$

$$w_{net,fin} = \left(w_{inst,G} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{2,i} \cdot w_{inst,Q,i} \right) \cdot (1 + k_{def}) - w_c = (1,15 + 0,8 \cdot 1,50) \cdot (1 + 0,6) = 4 \text{ mm} < \frac{6.000}{300} = 30 \text{ mm}$$

4.2 Fachwerkträger mit SDü

$E_{0,\text{mean}} = 11.000 \text{ N/mm}^2$

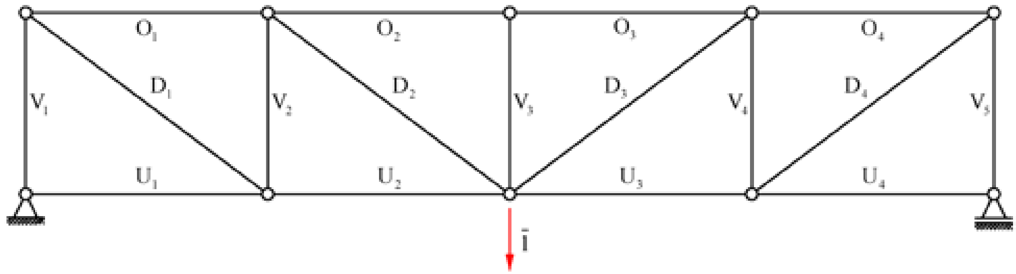
Querschnitte:

160/120 mm: $A = 19.200 \text{ mm}^2$

160/140 mm: $A = 22.400 \text{ mm}^2$

$K_{\text{ser}} = 2 \cdot 3.416 = 6.832 \text{ N/mm}$

Virtueller Kraftzustand



i	O_i	U_i	V_i	D_i
1	$-0,667$	$0,0$	$-0,5$	$+0,833$
2	$-1,333$	$+0,667$	$-0,5$	$+0,833$
3	$-1,333$	$+0,667$	$0,0$	$+0,833$
4	$-0,667$	$+0,0$	$-0,5$	$+0,833$
5			$-0,5$	

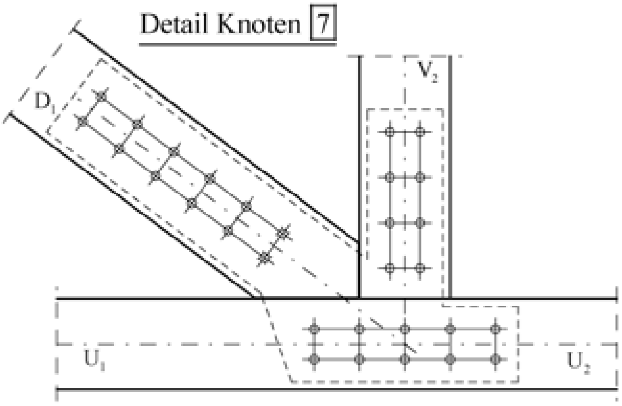
<u>Berechnung der Anfangsdurchbiegung aus ständiger Last</u>

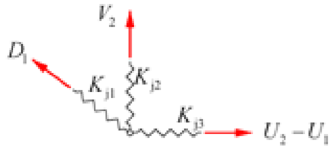
Anteile aus Stabdehnung:

Stab	Länge [mm]	Querschnitt [mm^2]	Stabkraft S_k [N]	Virtuelle Stabkraft $\overline{S}_k$ [-]	$\frac{S_i \cdot \overline{S}_i}{E_{0,\text{mean}} \cdot A} \cdot l_i$ [mm]
O_1	2.000	19.200	-40.000	-0,667	0,25
O_2	2.000	19.200	-53.333	-1,333	0,67
U_1	2.000	19.200	0	0,000	0,00
U_2	2.000	19.200	40.000	0,667	0,25
V_1	1.500	19.200	-40.000	-0,500	0,14
V_2	1.500	19.200	-30.000	-0,500	0,11
V_3	1.500	9.600	-10.000	0,000	0,00
D_1	2.500	22.400	50.000	0,833	0,42
D_2	2.500	22.400	16.667	0,833	0,14
Summe für eine Trägerhälfte					1,98

Anmerkung zu Verschiebungen an Knotenblechen in Fachwerken

Die innenliegende Stahlblech-Holzverbindung im Untergurt wird nur aus der horizontalen Komponente von $D_1(=U_2-U_1)$ belastet, da der Untergurt durchlaufend ist. Das hierzu passende statische System ist in der folgenden Zeichnung für Knoten 7 dargestellt.





Anteile aus der Nachgiebigkeit der Verbindungen

Stab	K_{ser} $[N/mm]$	Anzahl Scherflächen $n \cdot m$	Anzahl Anschlüsse i	Stabkraft S_k $[N]$	Virtuelle Stabkraft $\overline{S}_k$ [-]	$\sum \frac{S_k \cdot \overline{S}_k}{K_j}$ $[mm]$
O_1	6.832	20	1	-40.000	-0,667	0,20
$O_2 - O_1$	6.832	4	1	-13.333	-0,667	0,33
U_1	6.832	4	1	0	0,000	0,00
$U_2 - U_1$	6.832	20	1	40.000	0,667	0,20
V_1	6.832	20	2	-40.000	-0,500	0,29
V_2	6.832	16	2	-30.000	-0,500	0,27
V_3	6.832	4	2	-10.000	0,000	0,00
D_1	6.832	24	2	50.000	0,833	0,51
D_2	6.832	8	2	16.667	0,833	0,51
Summe für eine Trägerhälfte						2,31

Beiwerte: $k_{def} = 0{,}6$ und $\psi_{2,1} = 0{,}0$

$$w_{inst,G} = 2 \cdot \left(1{,}98 + 2{,}31\right) = 8{,}6 \text{ mm} \quad \rightarrow \quad w_{inst,Q,1} = \frac{5}{10} \cdot 8{,}6 \text{ mm} = 4{,}3 \text{ mm}$$

Gebrauchstauglichkeitsnachweis

a) Anfangsdurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination: $w_{inst} \leq \frac{l}{300}$

$$w_{inst} = w_{inst,G} + w_{inst,Q,1} + \sum_{i=2}^{n} \left(\psi_{0,i} \cdot w_{inst,Q,i}\right) = 8{,}6 + 4{,}3 = 12{,}9 \text{ mm} < \frac{8.000}{300} = 27 \text{ mm}$$

b) Enddurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination: $w_{fin} \leq \frac{l}{200}$

Da das Tragwerk ausschließlich Stahlblech-Holzverbindungen aufweist, können die Endverformungen vereinfacht nachgewiesen werden, da alle Verformungsbeiwerte k_{def} gleich groß sind.

$$w_{\text{fin}} = w_{\text{inst}} + \left(w_{\text{inst,G}} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{2,\text{i}} \cdot w_{\text{inst,Q,i}} \right) \cdot k_{\text{def}}$$

$$= 12,9 + (8,6 + 0,0 \cdot 4,3) \cdot 0,6 = 18,1 \text{ mm} < \frac{8.000}{200} = 40 \text{ mm}$$

c) Enddurchbiegung aus der quasi-ständigen Lastkombination: $w_{\text{net,fin}} \leq \frac{l}{300}$

$$w_{\text{net,fin}} = \left(w_{\text{inst,G}} + \sum_{i=1}^{n} \psi_{2,\text{i}} \cdot w_{\text{inst,Q,i}} \right) \cdot (1 + k_{\text{def}}) - w_{\text{c}} = (8,6 + 0,0 \cdot 4,3) \cdot (1 + 0,6) = 14 \text{ mm} < \frac{8.000}{300} = 27 \text{ mm}$$

5 Zusammengesetzte Biegeträger aus Holz und Holzwerkstoffen mit nachgiebigem Verbund

5.1 Vergleich zwischen zwei Balken

a) Biegesteifigkeiten für den Nachweis der Tragfähigkeit, jeweils im Anfangs- und Endzustand

E-Modul und Verschiebungsmodul Anfangszustand	E-Modul und Verschiebungsmodul Endzustand
$E_1 = E_2 = E_3 = E_{0,\text{mean}} = 12.000$	$E_\text{i} = E_{0,\text{mean,i}} \Big/ \left(1+\psi_2 \cdot k_{\text{def,i}}\right) \rightarrow E_{1/2/3} = 12.000 \Big/ \left(1+0,6\cdot 0,6\right) = 8.824\ \text{N/mm}^2$
$K_{1/3} = \frac{2}{3}\cdot K_\text{ser} = \frac{2}{3}\cdot 895 = 597 \cong 600\ \text{N/mm}$	$K_{1/3} = \frac{2}{3}\cdot K_{\text{ser},1} \Big/ \left(1+\psi_2\cdot 2\cdot\sqrt{k_{\text{def},1}\cdot k_{\text{def},2}}\right)$ $= \frac{2}{3}\cdot 895 \Big/ \left(1+0,6\cdot 2\cdot\sqrt{0,6\cdot 0,6}\right) = 347 \cong 350\ \text{N/mm}$

Balken 1

$$A_1 = A_2 = A_3 = 180\cdot 80 = 14,4\cdot 10^3\ \text{mm}^2 \ \ /\ \ I_{1,\text{y}} = I_{2,\text{y}} = I_{3,\text{y}} = \frac{180\cdot 80^3}{12} = 7,68\cdot 10^6\ \text{mm}^4 \ \ /\ \ s = 120/4 = 30\ \text{mm} \ \ /\ \ a_2 = 0 \ \ /\ \ a_1 = a_3 = 80\ \text{mm}$$

Anfangszustand	Endzustand
$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{1+\frac{\pi^2\cdot E_1\cdot A_1\cdot s_1}{K_1\cdot l^2}} = \frac{1}{1+\frac{\pi^2\cdot 12\cdot 10^3\cdot 14,4\cdot 10^3\cdot 30}{600\cdot\left(6,5\cdot 10^3\right)^2}} = 0,331$	$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{1+\frac{\pi^2\cdot 8.824\cdot 14,4\cdot 10^3\cdot 30}{350\cdot\left(6,5\cdot 10^3\right)^2}} = 0,282$
$\gamma_2 = 1$	$\gamma_2 = 1$

Effektive Biegesteifigkeit: $\left(E\cdot I_\text{y}\right)_\text{ef} = \sum_1^3\left(E_\text{i}\cdot I_{\text{i,y}} + \gamma_\text{i}\cdot E_\text{i}\cdot A_\text{i}\cdot a_\text{i}^2\right) = E_\text{i}\cdot\sum_1^3\left(3\cdot I_{1,\text{y}} + 2\cdot\gamma_1\cdot A_1\cdot a_1^2\right)$

$\left(E\cdot I_\text{y}\right)_\text{ef} = 12\cdot 10^3\cdot\left(3\cdot 7,68\cdot 10^6 + 2\cdot 0,331\cdot 14,4\cdot 10^3\cdot 80^2\right) = 1,009\cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2$	$\left(E\cdot I_\text{y}\right)_\text{ef} = 8.824\cdot\left(3\cdot 7,68\cdot 10^6 + 2\cdot 0,282\cdot 14,4\cdot 10^3\cdot 80^2\right) = 0,662\cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2$

Biegesteifigkeit: $\left(E\cdot I_\text{z}\right)$

$\left(E\cdot I_\text{z}\right) = 12.000\cdot\frac{240\cdot 180^3}{12} = 1,400\cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2$	$\left(E\cdot I_\text{z}\right) = 8.824\cdot\frac{240\cdot 180^3}{12} = 1,029\cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2$

Balken 2

$A_1 = A_2 = A_3 = 180 \cdot 80 = 14{,}4 \cdot 10^3 \text{ mm}^2$ / $I_{1,y} = I_{3,y} = \dfrac{180 \cdot 80^3}{12} = 7{,}68 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ / $I_{2,y} = \dfrac{80 \cdot 180^3}{12} = 38{,}88 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

$s = 60/2 = 30 \text{ mm}$ / $a_2 = 0$ / $a_1 = a_3 = 130 \text{ mm}$

Anfangszustand	Endzustand
$\gamma_1 = \gamma_3 = 0{,}331$ / $\gamma_2 = 1$ wie Querschnitt 2	$\gamma_1 = \gamma_3 = 0{,}282$ / $\gamma_2 = 1$ wie Querschnitt 2

Effektive Biegesteifigkeit: $\left(E \cdot I_y\right)_{ef} = \sum_1^3 \left(E_i \cdot I_{i,y} + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2\right) = E_i \cdot \sum_1^3 \left(2 \cdot I_{1,y} + I_{2,y} + 2 \cdot \gamma_1 \cdot A_1 \cdot a_1^2\right)$

Anfangszustand	Endzustand
$\left(E \cdot I_y\right)_{ef} = 12 \cdot 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 7{,}68 \cdot 10^6 + 38{,}88 \cdot 10^6 \\ +2 \cdot 0{,}331 \cdot 14{,}4 \cdot 10^3 \cdot 130^2 \end{pmatrix} = 2{,}586 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$	$\left(E \cdot I_y\right)_{ef} = 8.824 \cdot \begin{pmatrix} 2 \cdot 7{,}68 \cdot 10^6 + 38{,}88 \cdot 10^6 \\ +2 \cdot 0{,}282 \cdot 14{,}4 \cdot 10^3 \cdot 130^2 \end{pmatrix} = 1{,}690 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

Biegesteifigkeit: $\left(E \cdot I_z\right)$ mit $I_{1,z} = I_{3,z} = \dfrac{80 \cdot 180^3}{12} = 38{,}88 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$ / $I_{2,z} = \dfrac{180 \cdot 80^3}{12} = 7{,}68 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$

Anfangszustand	Endzustand
$\left(E \cdot I_z\right) = 12.000 \cdot \left(2 \cdot 38{,}88 \cdot 10^6 + 7{,}68 \cdot 10^6\right) = 1{,}025 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$	$\left(E \cdot I_z\right) = 8.824 \cdot \left(2 \cdot 38{,}8 \cdot 10^6 + 7{,}68 \cdot 10^6\right) = 0{,}754 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

b) Spannungen im Holz und die Scherbelastung der Nägel

Belastung: $M_{\mathrm{y,d}} = q_{\mathrm{z,d}} \cdot l^2/8 = 2{,}7 \cdot 6{,}5^2/8 = 14{,}26\ \mathrm{kNm}$ / $\mathrm{V}_{\mathrm{max,d}} = q_{\mathrm{z,d}} \cdot l/2 = 2{,}7 \cdot 6{,}5/2 = 8{,}775\ \mathrm{kN}$

Balken 1

Anfang	Ende
$\sigma_{\mathrm{i,d}} = \frac{M_{\mathrm{d}}}{(EI)_{\mathrm{ef}}} \cdot E_{\mathrm{i}} \cdot \gamma_{\mathrm{i}} \cdot a_{\mathrm{i}} \cdot \frac{A_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i,n}}}$	
$\sigma_{1,\mathrm{d}} = \sigma_{3,\mathrm{d}} = \underbrace{\frac{14{,}26 \cdot 10^6}{1{,}009 \cdot 10^{12}} \cdot 12.000}_{=0{,}1696} \cdot 0{,}331 \cdot 80 \cdot 1{,}0 = 4{,}49\ \mathrm{N/mm^2}$ / $\sigma_{2,\mathrm{d}} = 0$	$\sigma_{1,\mathrm{d}} = \sigma_{3,\mathrm{d}} = \underbrace{\frac{14{,}26 \cdot 10^6}{0{,}662 \cdot 10^{12}} \cdot 8.824}_{=0{,}1901} \cdot 0{,}282 \cdot 80 \cdot 1{,}0 = 4{,}29\ \mathrm{N/mm^2}$ / $\sigma_{2,\mathrm{d}} = 0$
Randspannungen: $\sigma_{\mathrm{m,i,d}} = \frac{M_{\mathrm{d}}}{(EI)_{\mathrm{ef}}} \cdot E_{\mathrm{i}} \cdot \frac{h_{\mathrm{i}}}{2} \cdot \frac{I_{\mathrm{i}}}{I_{\mathrm{i,n}}}$	
$\sigma_{\mathrm{m,1,d}} = \sigma_{\mathrm{m,2,d}} = \sigma_{\mathrm{m,3,d}} = 0{,}1696 \cdot \frac{80}{2} \cdot 1{,}0 = 6{,}78\ \mathrm{N/mm^2}$	$\sigma_{\mathrm{m,1,d}} = \sigma_{\mathrm{m,2,d}} = \sigma_{\mathrm{m,3,d}} = 0{,}1901 \cdot \frac{80}{2} \cdot 1{,}0 = 7{,}60\ \mathrm{N/mm^2}$
Die Schubspannung in der neutralen Ebene des Querschnittsteils 2: $\tau_{2,\mathrm{max,d}} = \frac{V_{\mathrm{max,d}} \cdot \left(\gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot a_3 + 0{,}5 \cdot E_2 \cdot b_2 \cdot h^2\right)}{(E \cdot I)_{\mathrm{ef}} \cdot b_2}$ mit $h = \frac{h_2}{2} + a_2$	
$h = \frac{80}{2} + 0 = 40\ \mathrm{mm}$	$h = \frac{80}{2} + 0 = 40\ \mathrm{mm}$
$\tau_{2,\mathrm{max,d}} = \frac{8{,}775 \cdot 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}331 \cdot 12.000 \cdot 14.400 \cdot 80 \\ +0{,}5 \cdot 12.000 \cdot 180 \cdot 40^2 \end{pmatrix}}{1{,}009 \cdot 10^{12} \cdot 180} = 0{,}305\ \mathrm{N/mm^2}$	$\tau_{2,\mathrm{max,d}} = \frac{8{,}775 \cdot 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 0{,}282 \cdot 8.824 \cdot 14.400 \cdot 80 \\ +0{,}5 \cdot 8.824 \cdot 180 \cdot 40^2 \end{pmatrix}}{0{,}662 \cdot 10^{12} \cdot 180} = 0{,}305\ \mathrm{N/mm^2}$
Bemessungswert der Scherkraft in den Anschlussfugen: $F_{1,\mathrm{v,Ed}} = \frac{V_{\mathrm{max,d}} \cdot \gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot s_{1,\min}}{(E \cdot I)_{\mathrm{ef}}}$; $F_{3,\mathrm{v,Ed}} = \frac{V_{\mathrm{max,d}} \cdot \gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot a_3 \cdot s_{3,\min}}{(E \cdot I)_{\mathrm{ef}}}$	
$F_{1,\mathrm{v,Ed}} = F_{3,\mathrm{v,Ed}} = \frac{8{,}775 \cdot 10^3 \cdot 0{,}331 \cdot 12.000 \cdot 14.400 \cdot 80 \cdot 30}{1{,}009 \cdot 10^{12}} = 1.195\ \mathrm{N}$	$F_{1,\mathrm{v,Ed}} = F_{3,\mathrm{v,Ed}} = \frac{8{,}775 \cdot 10^3 \cdot 0{,}282 \cdot 8.824 \cdot 14.400 \cdot 80 \cdot 30}{0{,}662 \cdot 10^{12}} = 1.140\ \mathrm{N}$

Balken 2

Anfang	Ende
$\sigma_{\mathrm{i,d}}=\frac{M_{\mathrm{d}}}{(EI)_{\mathrm{ef}}}\cdot E_{\mathrm{i}}\cdot\gamma_{\mathrm{i}}\cdot a_{\mathrm{i}}\cdot\frac{A_{\mathrm{i}}}{A_{\mathrm{i,n}}}$	
$\sigma_{1,\mathrm{d}}=\sigma_{3,\mathrm{d}}=\underbrace{\frac{14{,}26\cdot10^{6}}{2{,}586\cdot10^{12}}}_{=0{,}06617}\cdot12.000\cdot0{,}331\cdot130\cdot1{,}0=2{,}85\ \mathrm{N/mm^2}\quad/\quad\sigma_{2,\mathrm{d}}=0$	$\sigma_{1,\mathrm{d}}=\sigma_{3,\mathrm{d}}=\underbrace{\frac{14{,}26\cdot10^{6}}{1{,}690\cdot10^{12}}}_{=0{,}07446}\cdot8.824\cdot0{,}282\cdot130\cdot1{,}0=2{,}73\ \mathrm{N/mm^2}\ /\ \sigma_{2,\mathrm{d}}=0$
Randspannungen: $\sigma_{\mathrm{m,i,d}}=\frac{M_{\mathrm{d}}}{(EI)_{\mathrm{ef}}}\cdot E_{\mathrm{i}}\cdot\frac{h_{\mathrm{i}}}{2}\cdot\frac{I_{\mathrm{i}}}{I_{\mathrm{i,n}}}$	
$\sigma_{\mathrm{m,1,d}}=\sigma_{\mathrm{m,3,d}}=0{,}06617\cdot\frac{80}{2}\cdot1{,}0=2{,}65\ \mathrm{N/mm^2}$ $\sigma_{\mathrm{m,2,d}}=0{,}06617\cdot\frac{180}{2}\cdot1{,}0=5{,}96\ \mathrm{N/mm^2}$	$\sigma_{\mathrm{m,1,d}}=\sigma_{\mathrm{m,3,d}}=0{,}07446\cdot\frac{80}{2}\cdot1{,}0=2{,}98\ \mathrm{N/mm^2}$ $\sigma_{\mathrm{m,2,d}}=0{,}07446\cdot\frac{180}{2}\cdot1{,}0=6{,}70\ \mathrm{N/mm^2}$
Die Schubspannung in der neutralen Ebene des Querschnittsteils 2: $\tau_{2,\max,\mathrm{d}}=\frac{V_{\max,\mathrm{d}}\cdot\left(\gamma_3\cdot E_3\cdot A_3\cdot a_3+0{,}5\cdot E_2\cdot b_2\cdot h^2\right)}{(E\cdot I)_{\mathrm{ef}}\cdot b_2}$ mit $h=\frac{h_2}{2}+a_2$	
$h=\frac{180}{2}+0=90\ \mathrm{mm}$ $\tau_{2,\max,\mathrm{d}}=\frac{8{,}775\cdot10^{3}\cdot\begin{pmatrix}0{,}331\cdot12.000\cdot14.400\cdot130\\+0{,}5\cdot12.000\cdot80\cdot90^2\end{pmatrix}}{2{,}586\cdot10^{12}\cdot80}=0{,}480\ \mathrm{N/mm^2}$	$h=\frac{180}{2}+0=90\ \mathrm{mm}$ $\tau_{2,\max,\mathrm{d}}=\frac{8{,}775\cdot10^{3}\cdot\begin{pmatrix}0{,}282\cdot8.824\cdot14.400\cdot130\\+0{,}5\cdot8.824\cdot80\cdot90^2\end{pmatrix}}{1{,}690\cdot10^{12}\cdot80}=0{,}488\ \mathrm{N/mm^2}$
Bemessungswert der Scherkraft in den Anschlussfugen: $F_{1,\mathrm{v,Ed}}=\frac{V_{\max,\mathrm{d}}\cdot\gamma_1\cdot E_1\cdot A_1\cdot a_1\cdot s_{1,\min}}{(E\cdot I)_{\mathrm{ef}}}$; $F_{3,\mathrm{v,Ed}}=\frac{V_{\max,\mathrm{d}}\cdot\gamma_3\cdot E_3\cdot A_3\cdot a_3\cdot s_{3,\min}}{(E\cdot I)_{\mathrm{ef}}}$	
$F_{1,\mathrm{v,Ed}}=F_{3,\mathrm{v,Ed}}=\frac{8{,}775\cdot10^{3}\cdot0{,}331\cdot12.000\cdot14.400\cdot130\cdot30}{2{,}586\cdot10^{12}}=758\ \mathrm{N}$	$F_{1,\mathrm{v,Ed}}=F_{3,\mathrm{v,Ed}}=\frac{8{,}775\cdot10^{3}\cdot0{,}282\cdot8.824\cdot14.400\cdot130\cdot30}{1{,}690\cdot10^{12}}=726\ \mathrm{N}$

c) Ausnutzungsgrade für die Spannungen im Holz und die Scherbelastung der Nägel

		Bemessungswert der Festigkeit C30 $\left[\mathrm{N/mm^2}\right]$				
			Balken 1			
Querschnitt	b/h $[\mathrm{mm}]$	Knickbeiwert	$f_{\mathrm{c,0,d}}$	$f_{\mathrm{m,y,d}}$	$f_{\mathrm{t,0,d}}$	$f_{\mathrm{v,d}}$
1	180/80	$\lambda_z = 3.250/0,289 \cdot 180$ $\lambda_z = 62,5 \rightarrow k_{\mathrm{c,z}} = 0,640$	$14,2$	$1,134 \cdot 18,5 = 21,0$	$1,0 \cdot 11,1 = 11,1$	$1,23$
2	180/80	---				
3	180/80	---				
			Balken 2			
Querschnitt	b/h $[\mathrm{mm}]$	Knickbeiwert	$f_{\mathrm{c,0,d}}$	$f_{\mathrm{m,y,d}}$	$f_{\mathrm{t,0,d}}$	$f_{\mathrm{v,d}}$
1	180/80	$\lambda_z = 3.250/0,289 \cdot 180$ $\lambda_z = 62,5 \rightarrow k_{\mathrm{c,z}} = 0,640$	$14,2$	$1,134 \cdot 18,5 = 21,0$	$1,0 \cdot 11,1 = 11,1$	$1,23$
2	80/180	---		$1,0 \cdot 18,5 = 18,5$		
3	180/80	---		$1,134 \cdot 18,5 = 21,0$		

Tragfähigkeitsnachweise für Querschnitte und Verbindungsmittel **Balken 1**

Zustand	$\sigma_{1,\text{d}}$	$\sigma_{\text{m},1,\text{d}}$	$\sigma_{2,\text{d}}$	$\sigma_{\text{m},2,\text{d}}$	$\sigma_{3,\text{d}}$	$\sigma_{\text{m},3,\text{d}}$	$\tau_{2,\max,\text{d}}$	$\max F_{(1/3),\text{v,Ed}}$
Anfang $\left[\text{N/mm}^2\right]$	-4,49	6,78	0	6,78	+4,49	6,78	0,305	1.195 N
Ende $\left[\text{N/mm}^2\right]$	-4,29	7,60	0	7,60	+4,29	7,60	0,305	1.140 N
$\left(\frac{\sigma_{\text{i,c,d}}}{f_{\text{c,0,d}}}\right)^2 + \frac{\sigma_{\text{m,i,d}}}{f_{\text{m,y,d}}} \leq 1$	$\left(\frac{4,49}{14,2}\right)^2 + \frac{6,78}{21,0} = 0,42 < 1$ $\left(\frac{4,29}{14,2}\right)^2 + \frac{7,60}{21,0} = 0,45 < 1$							
$\frac{\sigma_{\text{i,c,d}}}{k_{\text{c,z}} \cdot f_{\text{c,0,d}}} \leq 1$	$\frac{4,49}{0,640 \cdot 14,2} = 0,49 < 1$							
$\frac{\sigma_{\text{m,i,d}}}{f_{\text{m,y,d}}}$			$\frac{7,60}{21,0} = 0,36 < 1$					
$\frac{\sigma_{\text{i,t,d}}}{f_{\text{t,0,d}}} + \frac{\sigma_{\text{m,i,d}}}{f_{\text{m,y,d}}} \leq 1$					$\frac{4,49}{11,1} + \frac{6,78}{21,0} = 0,73 < 1$ $\frac{4,29}{11,1} + \frac{7,60}{21,0} = 0,77 < 1$			
$\frac{\tau_{2,\max,\text{d}}}{f_{\text{v,d}}}$							$\frac{0,305}{1,23} = 0,25 < 1$	
$\frac{\max F_{(1/3),\text{v,Ed}}}{(n_{\text{ef}}/n) \cdot F_{1,\text{v,Rd}}}$								$\frac{1.195}{1,0 \cdot 1.227} = 0,97 \leq 1$

Tragfähigkeitsnachweise für Querschnitte und Verbindungsmittel **Balken 2**

Zustand	$\sigma_{1,d}$	$\sigma_{m,1,d}$	$\sigma_{2,d}$	$\sigma_{m,2,d}$	$\sigma_{3,d}$	$\sigma_{m,3,d}$	$\tau_{2,max,d}$	$\max F_{(1/3),v,Ed}$
Anfang $\left[\mathrm{N/mm^2}\right]$	-2,85	2,65	0	5,96	+2,85	2,65	0,480	758 N
Ende $\left[\mathrm{N/mm^2}\right]$	-2,73	2,98	0	6,70	+2,73	2,98	0,488	726 N
$\left(\frac{\sigma_{i,c,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,i,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1$	$\left(\frac{2,85}{14,2}\right)^2 + \frac{2,65}{21,0} = 0,17 < 1$ $\left(\frac{2,73}{14,2}\right)^2 + \frac{2,98}{21,0} = 0,18 < 1$							
$\frac{\sigma_{i,c,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} \leq 1$	$\frac{2,85}{0,640 \cdot 14,2} = 0,31 < 1$							
$\frac{\sigma_{m,i,d}}{f_{m,y,d}}$			$\frac{6,70}{18,5} = 0,36 < 1$					
$\frac{\sigma_{i,t,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,i,d}}{f_{m,y,d}} \leq 1$					$\frac{2,85}{11,1} + \frac{2,65}{21,0} = 0,38 < 1$ $\frac{2,73}{11,1} + \frac{2,98}{21,0} = 0,39 < 1$			
$\frac{\tau_{2,max,d}}{k_{cr} \cdot f_{v,d}}$							$\frac{0,488}{1,23} = 0,40 < 1$	
$\frac{\max F_{(1/3),v,Ed}}{(n_{ef}/n) \cdot F_{1,v,Rd}}$								$\frac{758}{1,0 \cdot 1.200} = 0,63 < 1$

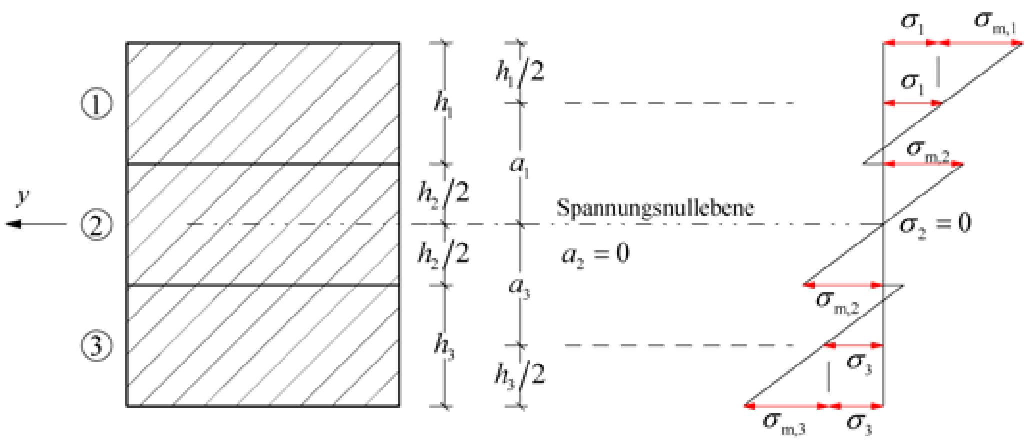


Abb. 5-1 Spannungsverlauf für Balken1

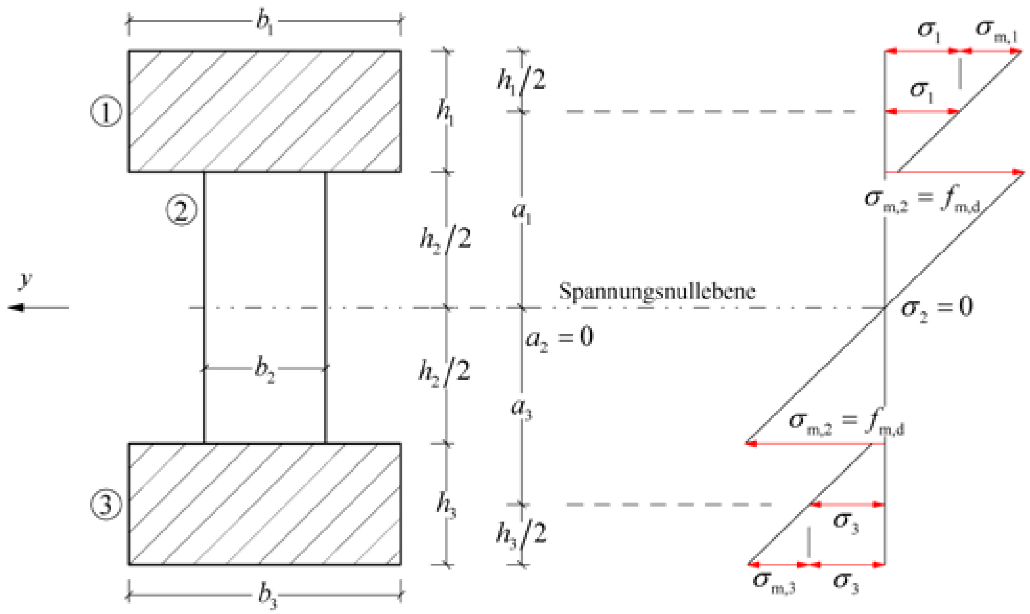


Abb. 5-2 Spannungsverlauf für Balken 2

5.2 Nachweis einer genagelten offenen Decke im Holzrahmenbau

Bemessungswert des maximalen Momentes und der maximalen Querkraft für den Tragfähigkeitsnachweis

$$q_\mathrm{d} = 1{,}35 \cdot q_\mathrm{G,k} + 1{,}5 \cdot q_\mathrm{Q,k} = 1{,}35 \cdot 0{,}7 + 1{,}5 \cdot 1{,}5 = 3{,}195 \text{ kN/m} \rightarrow M_\mathrm{d} = \frac{3{,}195 \cdot 4{,}0^2}{8} = 6{,}39 \text{ kNm} \;/\; V_\mathrm{max,d} = \frac{3{,}195 \cdot 4{,}0}{2} = 6{,}39 \text{ kN}$$

E-Modul und Verschiebungsmodul Anfangszustand	E-Modul und Verschiebungsmodul Endzustand
$E_1 = 1.600 \text{ N/mm}^2 \;/\; E_2 = 11.000 \text{ N/mm}^2$	$E_\mathrm{i} = E_\mathrm{0,mean,i} \big/ \left(1 + \psi_2 \cdot k_\mathrm{def,i}\right) \rightarrow$ $E_1 = 1.600 \big/ \left(1 + 0{,}3 \cdot 2{,}25\right) = 955 \text{ N/mm}^2$ $E_2 = 11.000 \big/ \left(1 + 0{,}3 \cdot 0{,}6\right) = 9.322 \text{ N/mm}^2$
$\rho_\mathrm{k} = \sqrt{550 \cdot 350} = 439$ $K_1 = \frac{2}{3} \cdot K_\mathrm{ser,1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_\mathrm{k}^{1,5}}{30} \cdot d^{0,8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{439^{1,5}}{30} \cdot 3{,}8^{0,8} = 595 \text{ N/mm}$	$K_{1/3} = \frac{2}{3} \cdot K_\mathrm{ser,1} \Big/ \left(1 + \psi_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{k_\mathrm{def,1} \cdot k_\mathrm{def,2}}\right)$ $= 595 \Big/ \left(1 + 0{,}3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2{,}25 \cdot 0{,}6}\right) = 350 \text{ N/mm}$

$$A_1 = 625 \cdot 22 = 13{,}75 \cdot 10^3 \;/\; A_2 = 60 \cdot 200 = 12 \cdot 10^3 \text{ mm}^2 \;/\; I_\mathrm{1,y} = \frac{625 \cdot 22^3}{12} = 0{,}555 \cdot 10^6 \;/\; I_\mathrm{2,y} = \frac{60 \cdot 200^3}{12} = 40 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \;/\; s = 50 \text{ mm}$$

a) Tragfähigkeitsnachweis im Anfangszustand	b) Tragfähigkeitsnachweis im Endzustand
$\gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot s_1}{K_1 \cdot l^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot 1.600 \cdot 13.750 \cdot 50}{595 \cdot 4.000^2}} = 0{,}467$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot s_1}{K_1 \cdot l^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot 955 \cdot 13.750 \cdot 50}{350 \cdot 4.000^2}} = 0{,}464$ $\gamma_2 = 1$

Lage der Spannungsnullebene $a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\gamma_1 \cdot A_1 \cdot \left(h_1 + h_2\right) - \cancel{\gamma_3 \cdot A_3 \cdot \left(h_2 + h_3\right)}}{\sum_{\mathrm{i}=1}^{2} \gamma_\mathrm{i} \cdot A_\mathrm{i}}$; $a_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} - a_2$

$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}467 \cdot 1.600 \cdot 13.750 \cdot \left(22 + 200\right)}{0{,}467 \cdot 1.600 \cdot 13.750 + 1{,}0 \cdot 11.000 \cdot 12.000} = 8{,}02 \cong 8{,}0 \text{ mm}$ $a_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} - a_2 = \frac{22 + 200}{2} - 8{,}0 = 103 \text{ mm}$	$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{0{,}464 \cdot 955 \cdot 13.750 \cdot \left(22 + 200\right)}{0{,}464 \cdot 955 \cdot 13.750 + 1{,}0 \cdot 9.322 \cdot 12.000} = 5{,}73 \cong 5{,}7 \text{ mm}$ $a_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} - a_2 = \frac{22 + 200}{2} - 5{,}7 = 105{,}3 \text{ mm}$

Effektive Biegesteifigkeit: $\left(E\cdot I_y\right)_{ef} = \sum_1^2\left(E_i\cdot I_{i,y}+\gamma_i\cdot E_i\cdot A_i\cdot a_i^2\right)$

$\left(E\cdot I\right)_{ef} = 1.600\cdot\left(0{,}555\cdot10^6+0{,}467\cdot13.750\cdot103{,}0^2\right)$ $+11.000\cdot\left(40\cdot10^6+1{,}0\cdot12.000\cdot8{,}0^2\right)=0{,}558\cdot10^{12}\ \text{Nmm}^2$	$\left(E\cdot I\right)_{ef} = 955\cdot\left(0{,}555\cdot10^6+0{,}464\cdot13.750\cdot105{,}3^2\right)$ $+9.322\cdot\left(40\cdot10^6+1{,}0\cdot12.000\cdot5{,}7^2\right)=0{,}445\cdot10^{12}\ \text{Nmm}^2$

Schwerpunktspannungen: $\sigma_{i,d} = \frac{M_d}{(EI)_{ef}}\cdot E_i\cdot\gamma_i\cdot a_i\cdot\frac{A_i}{A_{i,n}}$

$\sigma_{1,d} = \underbrace{\frac{6{,}39\cdot10^6}{0{,}558\cdot10^{12}}}_{11{,}452\cdot10^{-6}}\cdot1.600\cdot0{,}467\cdot103{,}0 = 0{,}881\ \text{N/mm}^2\ (\text{Druck})$	$\sigma_{1,d} = \underbrace{\frac{6{,}39\cdot10^6}{0{,}445\cdot10^{12}}}_{14{,}360\cdot10^{-6}}\cdot955\cdot0{,}464\cdot105{,}3 = 0{,}670\ \text{N/mm}^2\ (\text{Druck})$
$\sigma_{2,d} = 11{,}452\cdot10^{-6}\cdot11.000\cdot1{,}0\cdot8{,}0 = 1{,}008\ \text{N/mm}^2\ (\text{Zug})$	$\sigma_{2,d} = 14{,}360\cdot10^{-6}\cdot9.322\cdot1{,}0\cdot5{,}7 = 0{,}768\ \text{N/mm}^2\ (\text{Zug})$

Randspannungen: $\sigma_{m,i,d} = \frac{M_d}{(EI)_{ef}}\cdot E_i\cdot\frac{h_i}{2}\cdot\frac{I_i}{I_{i,n}}$

$\sigma_{m,1,d} = 11{,}452\cdot10^6\cdot1.600\cdot\frac{22}{2}\cdot1{,}0 = 0{,}201\ \text{N/mm}^2$	$\sigma_{m,1,d} = 14{,}360\cdot10^6\cdot955\cdot\frac{22}{2}\cdot1{,}0 = 0{,}151\ \text{N/mm}^2$
$\sigma_{m,2,d} = 11{,}452\cdot10^6\cdot11.000\cdot\frac{200}{2}\cdot1{,}0 = 12{,}60\ \text{N/mm}^2$	$\sigma_{m,2,d} = 14{,}360\cdot10^6\cdot9.322\cdot\frac{200}{2}\cdot1{,}0 = 13{,}40\ \text{N/mm}^2$

Die Schubspannung in der neutralen Ebene des Querschnittsteils 2: $\tau_{2,max,d} = \frac{V_{max,d}\cdot\left(\cancel{\gamma_3\cdot E_3\cdot A_3\cdot a_3}+0{,}5\cdot E_2\cdot b_2\cdot h^2\right)}{\left(E\cdot I\right)_{ef}\cdot b_2}$ mit $h=\frac{h_2}{2}+a_2$

$h=\frac{200}{2}+8{,}0=108{,}0\ \text{mm}$	$h=\frac{200}{2}+5{,}7=105{,}7\ \text{mm}$
$\tau_{2,max,d} = \frac{6.390\cdot\left(0{,}5\cdot11.000\cdot60\cdot108{,}0^2\right)}{0{,}558\cdot10^{12}\cdot60} = 0{,}735\ \text{N/mm}^2$	$\tau_{2,max,d} = \frac{6.390\cdot\left(0{,}5\cdot9.322\cdot60\cdot105{,}7^2\right)}{0{,}445\cdot10^{12}\cdot60} = 0{,}749\ \text{N/mm}^2$

Bemessungswert der Scherkraft in der Anschlussfuge: $F_{1,v,Ed} = \frac{V_{max,d}\cdot\gamma_1\cdot E_1\cdot A_1\cdot a_1\cdot s_{1,min}}{\left(E\cdot I\right)_{ef}}$

$F_{1,v,Ed} = \frac{6.390\cdot0{,}467\cdot1.600\cdot13.750\cdot103{,}0\cdot50}{0{,}558\cdot10^{12}} = 606\ \text{N}$	$F_{1,v,Ed} = \frac{6.390\cdot0{,}464\cdot955\cdot13.750\cdot105{,}3\cdot50}{0{,}445\cdot10^{12}} = 461\ \text{N}$

			Bemessungswert der Festigkeiten $\left[\mathrm{N/mm^2}\right]$			
Querschnitt	Werkstoff	b/h $[\mathrm{mm}]$	$f_{\mathrm{c,0,d}}$	$f_{\mathrm{m,y,d}}$	$f_{\mathrm{t,0,d}}$	$k_{\mathrm{cr}} \cdot f_{\mathrm{v,d}}$
1	Spanplatte P4	625/22	$0{,}65 \cdot 9{,}6/1{,}3 = 4{,}8$	$0{,}65 \cdot 10{,}8/1{,}3 = 5{,}4$	$0{,}65 \cdot 6{,}9/1{,}3 = 3{,}45$	
2	C24	60/200	12,9	$1{,}0 \cdot 14{,}8 = 14{,}8$	$1{,}0 \cdot 8{,}62 = 8{,}62$	$1{,}23$

Zustand	$\sigma_{1,\mathrm{d}}$	$\sigma_{\mathrm{m,1,d}}$	$\sigma_{2,\mathrm{d}}$	$\sigma_{\mathrm{m,2,d}}$	$\tau_{2,\mathrm{max,d}}$	$\max F_{(1/3),\mathrm{v,Ed}}$
Anfang $\left[\mathrm{N/mm^2}\right]$	-0,881	0,201	+1,008	12,60	0,735	606 N
Ende $\left[\mathrm{N/mm^2}\right]$	-0,670	0,151	+0,768	13,40	0,749	461 N
$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{i,c,d}}}{f_{\mathrm{c,0,d}}}\right)^2 + \frac{\sigma_{\mathrm{m,i,d}}}{f_{\mathrm{m,y,d}}} \le 1$	$\left(\frac{0{,}881}{4{,}8}\right)^2 + \frac{0{,}201}{5{,}4} = 0{,}07 < 1$					
$\frac{\sigma_{\mathrm{i,c,d}}}{k_{\mathrm{c,z}} \cdot f_{\mathrm{c,0,d}}} \le 1$	$\frac{0{,}881}{1{,}0 \cdot 4{,}8} = 0{,}18 < 1$					
$\frac{\sigma_{\mathrm{i,t,d}}}{f_{\mathrm{t,0,d}}} + \frac{\sigma_{\mathrm{m,i,d}}}{f_{\mathrm{m,y,d}}} \le 1$			$\frac{1{,}008}{8{,}62} + \frac{12{,}60}{14{,}8} = 0{,}97 < 1$ $\frac{0{,}768}{8{,}62} + \frac{13{,}40}{14{,}8} = 0{,}99 \le 1$			
$\frac{\tau_{2,\mathrm{max,d}}}{k_{\mathrm{cr}} \cdot f_{\mathrm{v,d}}}$					$\frac{0{,}749}{1{,}23} = 0{,}61 < 1$	
$\frac{\max F_{(1/3),\mathrm{v,Ed}}}{(n_{\mathrm{ef}}/n) \cdot F_{1,\mathrm{v,Rd}}}$						$\frac{606}{1{,}0 \cdot 670} = 0{,}90 < 1$

5.3 Nachweis einer geklammerten geschlossenen Decke im Holzrahmenbau

a) Biegesteifigkeit für den Tragfähigkeitsnachweis im ohne Berücksichtigung der Verbundwirkung der Verbindungsmittel

Bemessungswert des maximalen Momentes und der maximalen Querkraft für den Tragfähigkeitsnachweis

$$q_d = 1{,}35 \cdot q_{G,k} + 1{,}5 \cdot q_{Q,k} = 1{,}35 \cdot 0{,}8 + 1{,}5 \cdot 1{,}8 = 3{,}78 \text{ kN/m} \;\; / \;\; M_d = \frac{3{,}78 \cdot 3{,}2^2}{8} = 4{,}84 \text{ kNm} \;\; / \;\; V_{max,d} = \frac{3{,}78 \cdot 3{,}2}{2} = 6{,}05 \text{ kN}$$

$$A_1 = A_3 = 625 \cdot 22 = 13.750 \;\; / \;\; A_2 = 60 \cdot 180 = 10.800 \text{ mm}^2 \;\; / \;\; I_{1,y} = I_{3,y} = \frac{625 \cdot 22^3}{12} = 0{,}555 \cdot 10^6 \;\; / \;\; I_{2,y} = \frac{60 \cdot 180^3}{12} = 29{,}16 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \;\; / \; s = (30/2) = 15 \text{ mm}$$

Anfangszustand	Endzustand
E-Modul und Verschiebungsmodul Anfangszustand	E-Modul und Verschiebungsmodul Endzustand
$E_1 = 2.100 \text{ N/mm}^2 \;\; / \;\; E_2 = 11.000 \text{ N/mm}^2$	$E_i = E_{0,mean,i} / (1 + \psi_2 \cdot k_{def,i}) \rightarrow$ $E_1 = E_3 = 2.100 / (1 + 0{,}5 \cdot 1{,}5) = 1.200 \text{ N/mm}^2$ $E_2 = 11.000 / (1 + 0{,}5 \cdot 0{,}6) = 8.460 \text{ N/mm}^2$
$\rho_k = \sqrt{550 \cdot 350} = 439$ $K_1 = K_3 = \frac{2}{3} \cdot K_{ser,1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\rho_k^{1,5}}{80} \cdot d^{0,8} = \frac{2}{3} \cdot \frac{439^{1,5}}{80} \cdot 2{,}0^{0,8} = 133 \text{ N/mm}$	$K_{(1/3)} = \frac{2}{3} \cdot K_{ser,1} \Big/ \left(1 + \psi_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{k_{def,1} \cdot k_{def,2}}\right)$ $= 133 \Big/ \left(1 + 0{,}5 \cdot 2 \cdot \sqrt{1{,}5 \cdot 0{,}6}\right) = 68 \text{ N/mm}$
E-Modul und Verschiebungsmodul Anfangszustand	E-Modul und Verschiebungsmodul Endzustand
$(E \cdot I)_{ef} = \sum_1^3 (E_i \cdot I_i) = 2 \cdot E_1 \cdot I_1 + E_2 \cdot I_2$	
$(E \cdot I)_{ef} = 2 \cdot 2.100 \cdot 0{,}555 \cdot 10^6 + 11.000 \cdot 29{,}16 \cdot 10^6 = 0{,}323 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$	$(E \cdot I)_{ef} = 2 \cdot 1.200 \cdot 0{,}555 \cdot 10^6 + 8.460 \cdot 29{,}16 \cdot 10^6 = 0{,}248 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

b) Tragfähigkeitsnachweise mit Berücksichtigung der Verbundwirkung der Verbindungsmittel

Anfangszustand	Endzustand
$\gamma_1 = \gamma_3 = \dfrac{1}{1+\dfrac{\pi^2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot s_1}{K_1 \cdot l^2}} = \dfrac{1}{1+\dfrac{\pi^2 \cdot 2.100 \cdot 13.750 \cdot 15}{133 \cdot 3.200^2}} = 0,242$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = \gamma_3 = \dfrac{1}{1+\dfrac{\pi^2 \cdot 1.200 \cdot 13.750 \cdot 15}{68 \cdot 3.200^2}} = 0,222$ $\gamma_2 = 1$

Lage der Spannungsnullebene, Symmetrie: $a_2 = 0$; $a_1 = \dfrac{h_1 + h_2}{2} - a_2$

Anfangszustand	Endzustand
$a_1 = a_3 = \dfrac{h_1 + h_2}{2} - a_2 = \dfrac{22+180}{2} - 0 = 101 \text{ mm}$	$a_1 = a_3 = \dfrac{h_1 + h_2}{2} - a_2 = \dfrac{22+180}{2} - 0 = 101 \text{ mm}$

Effektive Biegesteifigkeit: $\left(E \cdot I_y\right)_{ef} = \sum_1^3 \left(E_i \cdot I_{i,y} + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2\right)$

Anfangszustand	Endzustand
$\left(E \cdot I\right)_{ef} = 2 \cdot 2.100 \cdot \left(0,555 \cdot 10^6 + 0,242 \cdot 13,75 \cdot 10^3 \cdot 101^2\right)$ $+11.000 \cdot 29,16 \cdot 10^6 = 0,465 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$	$\left(E \cdot I\right)_{ef} = 2 \cdot 1.200 \cdot \left(0,555 \cdot 10^6 + 0,222 \cdot 13,75 \cdot 10^3 \cdot 101^2\right)$ $+8.460 \cdot 29,16 \cdot 10^6 = 0,323 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

Schwerpunktspannungen: $\sigma_{i,d} = \dfrac{M_d}{\left(EI\right)_{ef}} \cdot E_i \cdot \gamma_i \cdot a_i \cdot \dfrac{A_i}{A_{i,n}}$

Anfangszustand	Endzustand
$\sigma_{1,d} = \underbrace{\dfrac{4,84 \cdot 10^6}{0,465 \cdot 10^{12}}}_{10,409 \cdot 10^{-5}} \cdot 2.100 \cdot 0,242 \cdot 101 = 0,534 \text{ N/mm}^2 \left(\text{Druckspannung}\right)$ $\sigma_{2,d} = 0$ $\sigma_{3,d} = \sigma_{1,d} = 0,534 \text{ N/mm}^2 \left(\text{Zugspannung}\right)$	$\sigma_{1,d} = \underbrace{\dfrac{4,84 \cdot 10^6}{0,323 \cdot 10^{12}}}_{14,985 \cdot 10^{-5}} \cdot 1.200 \cdot 0,222 \cdot 101 = 0,403 \text{ N/mm}^2 \left(\text{Druckspannung}\right)$ $\sigma_{2,d} = 0$ $\sigma_{3,d} = \sigma_{1,d} = 0,403 \text{ N/mm}^2 \left(\text{Zugspannung}\right)$

Randspannungen: $\sigma_{\mathrm{m,i,d}} = \frac{M_{\mathrm{d}}}{(EI)_{\mathrm{ef}}} \cdot E_{\mathrm{i}} \cdot \frac{h_{\mathrm{i}}}{2} \cdot \frac{I_{\mathrm{i}}}{I_{\mathrm{i,n}}}$

$\sigma_{\mathrm{m,1,d}} = \sigma_{\mathrm{m,3,d}} = 10,409 \cdot 10^6 \cdot 2.100 \cdot \frac{22}{2} \cdot 1,0 = 0,240\ \mathrm{N/mm^2}$	$\sigma_{\mathrm{m,1,d}} = \sigma_{\mathrm{m,3,d}} = 14,985 \cdot 10^6 \cdot 1.200 \cdot \frac{22}{2} \cdot 1,0 = 0,198\ \mathrm{N/mm^2}$
$\sigma_{\mathrm{m,2,d}} = 10,409 \cdot 10^6 \cdot 11.000 \cdot \frac{180}{2} \cdot 1,0 = 10,30\ \mathrm{N/mm^2}$	$\sigma_{\mathrm{m,2,d}} = 14,985 \cdot 10^6 \cdot 8.460 \cdot \frac{180}{2} \cdot 1,0 = 11,42\ \mathrm{N/mm^2}$

Die Schubspannung in der neutralen Ebene des Querschnittsteils 2: $\tau_{\mathrm{2,max,d}} = \frac{V_{\mathrm{max,d}} \cdot \left(\gamma_3 \cdot E_3 \cdot A_3 \cdot a_3 + 0,5 \cdot E_2 \cdot b_2 \cdot h^2\right)}{(E \cdot I)_{\mathrm{ef}} \cdot b_2}$ mit $h = \frac{h_2}{2} + a_2$

$h = \frac{180}{2} + 0 = 90,0\ \mathrm{mm}$	$h = \frac{180}{2} + 0 = 90,0\ \mathrm{mm}$
$\tau_{\mathrm{2,max,d}} = \frac{6,05 \cdot 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 0,242 \cdot 2.100 \cdot 13.750 \cdot 101 \\ +0,5 \cdot 11.000 \cdot 60 \cdot 90^2 \end{pmatrix}}{0,465 \cdot 10^{12} \cdot 60} = 0,732\ \mathrm{N/mm^2}$	$\tau_{\mathrm{2,max,d}} = \frac{6,05 \cdot 10^3 \cdot \begin{pmatrix} 0,222 \cdot 1.200 \cdot 13.750 \cdot 101 \\ +0,5 \cdot 8.460 \cdot 60 \cdot 90^2 \end{pmatrix}}{0,323 \cdot 10^{12} \cdot 60} = 0,758\ \mathrm{N/mm^2}$

Bemessungswert der Scherkraft in der Anschlussfuge: $F_{\mathrm{1,v,Ed}} = \frac{V_{\mathrm{max,d}} \cdot \gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot s_{\mathrm{1,min}}}{(E \cdot I)_{\mathrm{ef}}}$

$F_{\mathrm{1,v,Ed}} = F_{\mathrm{3,v,Ed}} = \frac{6,05 \cdot 10^3 \cdot 0,242 \cdot 2.100 \cdot 13.750 \cdot 101 \cdot 15}{0,465 \cdot 10^{12}} = 137\ \mathrm{N}$	$F_{\mathrm{1,v,Ed}} = F_{\mathrm{3,v,Ed}} = \frac{6,05 \cdot 10^3 \cdot 0,222 \cdot 1.200 \cdot 13.750 \cdot 101 \cdot 15}{0,323 \cdot 10^{12}} = 104\ \mathrm{N}$

Querschnitt	Werkstoff	b/h $[\mathrm{mm}]$	Bemessungswert der Festigkeiten $[\mathrm{N/mm^2}]$			
			$f_{c,0,d}$	$f_{m,y,d}$	$f_{t,0,d}$	$k_{cr} \cdot f_{v,d}$
1 und 3	Spanplatte P6	625/22	$0,70 \cdot 12,8/1,3 = 6,9$	$0,70 \cdot 13,3/1,3 = 7,2$	$0,70 \cdot 8,5/1,3 = 4,6$	
2	C24	60/180	12,9	$1,0 \cdot 14,8 = 14,8$	$1,0 \cdot 8,62 = 8,62$	$1,23$

Zustand	$\sigma_{1,d}$	$\sigma_{m,1,d}$	$\sigma_{2,d}$	$\sigma_{m,2,d}$	$\sigma_{3,d}$	$\sigma_{m,3,d}$	$\tau_{2,max,d}$	$\max F_{(1/3),v,Ed}$
Anfang $[\mathrm{N/mm^2}]$	-0,534	0,240	0	10,30	+0,534	0,240	0,732	137 N
Ende $[\mathrm{N/mm^2}]$	-0,403	0,198	0	11,42	+0,403	0,198	0,758	104 N
$\left(\frac{\sigma_{i,c,d}}{f_{c,0,d}}\right)^2 + \frac{\sigma_{m,i,d}}{f_{m,y,d}} \le 1$	$\left(\frac{0,534}{6,9}\right)^2 + \frac{0,240}{7,2} = 0,04 < 1$							
$\frac{\sigma_{i,c,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,0,d}} \le 1$	$\frac{0,534}{1,0 \cdot 6,9} = 0,08 < 1$							
$\frac{\sigma_{m,i,d}}{f_{m,y,d}} \le 1$			$\frac{11,42}{14,8} = 0,77 < 1$					
$\frac{\sigma_{i,t,d}}{f_{t,0,d}} + \frac{\sigma_{m,i,d}}{f_{m,y,d}} \le 1$					$\frac{0,534}{4,6} + \frac{0,240}{7,2} = 0,15 < 1$			
$\frac{\tau_{2,max,d}}{k_{cr} \cdot f_{v,d}}$							$\frac{0,758}{1,23} = 0,62 < 1$	
$\frac{\max F_{(1/3),v,Ed}}{(n_{ef}/n) \cdot F_{1,v,Rd}}$								$\frac{137}{1,0 \cdot 330} = 0,42 < 1$

c) Gebrauchstauglichkeitsnachweis unter Berücksichtigung der Verbundwirkung und der Unterschiedlichkeit der Baustoffe

Anfangszustand	Endzustand
E-Modul und Verschiebungsmodul $E_1 = 2.100 \text{ N/mm}^2 \;\; / \;\; E_2 = 11.000 \text{ N/mm}^2$ $\rho_k = \sqrt{550 \cdot 350} = 439$ $K_{ser,1} = K_{ser,3} = \frac{\rho_k^{1,5}}{80} \cdot d^{0,8} = \frac{439^{1,5}}{80} \cdot 2,0^{0,8} = 200 \text{ N/mm}$	E-Modul und Verschiebungsmodul $E_i = E_{0,mean,i} \big/ \left(1 + k_{def,i}\right) \rightarrow$ $E_1 = E_3 = 2.100 \big/ (1 + 1,5) = 840 \text{ N/mm}^2$ $E_2 = 11.000 \big/ (1 + 0,6) = 6.875 \text{ N/mm}^2$ $K_{ser,1,fin} = K_{ser,3,fin} = K_{ser,1} \Big/ \left(1 + 2 \cdot \sqrt{k_{def,1} \cdot k_{def,2}}\right)$ $K_{ser,1,fin} = K_{ser,3,fin} = 200 \Big/ \left(1 + 2 \cdot \sqrt{1,5 \cdot 0,6}\right) = 69 \text{ N/mm}$
$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot s_1}{K_1 \cdot l^2}} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot 2.100 \cdot 13.750 \cdot 15}{200 \cdot 3.200^2}} = 0,324$ $\gamma_2 = 1$	$\gamma_1 = \gamma_3 = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2 \cdot 840 \cdot 13.750 \cdot 15}{69 \cdot 3.200^2}} = 0,289$ $\gamma_2 = 1$

Lage der Spannungsnullebene, Symmetrie: $a_2 = 0$; $a_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} - a_2$

Anfangszustand	Endzustand
$a_1 = a_3 = \frac{h_1 + h_2}{2} - a_2 = \frac{22 + 180}{2} - 0 = 101 \text{ mm}$	$a_1 = a_3 = \frac{h_1 + h_2}{2} - a_2 = \frac{22 + 180}{2} - 0 = 101 \text{ mm}$

Effektive Biegesteifigkeit: $\left(E \cdot I_y\right)_{ef} = \sum_1^3 \left(E_i \cdot I_{i,y} + \gamma_i \cdot E_i \cdot A_i \cdot a_i^2\right)$

Anfangszustand	Endzustand
$(E \cdot I)_{ef} = 2 \cdot 2.100 \cdot \left(0,555 \cdot 10^6 + 0,324 \cdot 13,75 \cdot 10^3 \cdot 101^2\right)$ $+ 11.000 \cdot 29,16 \cdot 10^6 = 0,514 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$	$(E \cdot I)_{ef} = 2 \cdot 840 \cdot \left(0,555 \cdot 10^6 + 0,289 \cdot 13,75 \cdot 10^3 \cdot 101^2\right)$ $+ 6.875 \cdot 29,16 \cdot 10^6 = 0,273 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

Zum Vergleich: Biegesteifigkeit ohne Klammernverbindung

Anfangszustand	Endzustand
$\sum_1^3 \left(E_i \cdot I_{i,y}\right) = 2 \cdot 2.100 \cdot 0,555 \cdot 10^6 + 11.000 \cdot 29,16 \cdot 10^6 = 0,323 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$	$\sum_1^3 \left(E_i \cdot I_{i,y}\right) = 2 \cdot 840 \cdot 0,555 \cdot 10^6 + 6.875 \cdot 29,16 \cdot 10^6 = 0,201 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

$$w_{\text{inst,G}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_{\text{G,k}} \cdot l^4}{E \cdot I} = \frac{5}{384} \cdot \frac{0,8 \cdot 3.200^4}{0,514 \cdot 10^{12}} = 2,1\ \text{mm} \rightarrow w_{\text{inst,Q,1}} = \frac{q_{\text{Q,k}}}{q_{\text{G,k}}} \cdot w_{\text{inst,G}} = \frac{1,8}{0,8} \cdot 2,1 = 4,8\ \text{mm}$$

$$w_{\text{fin,G}} = \frac{5}{384} \cdot \frac{q_{\text{G,k}} \cdot l^4}{E \cdot I} = \frac{5}{384} \cdot \frac{0,8 \cdot 3.200^4}{0,273 \cdot 10^{12}} = 4,0\ \text{mm} \rightarrow w_{\text{fin,Q,1}} = \frac{q_{\text{Q,k}}}{q_{\text{G,k}}} \cdot w_{\text{inst,G}} = \frac{1,8}{0,8} \cdot 4,0 = 9,0\ \text{mm}$$

Gebrauchstauglichkeitsnachweis für einen nicht überhöhten Träger

Anfangsdurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination:

$$w_{\text{inst}} = w_{\text{inst,G}} + w_{\text{inst,Q,1}} + \cancel{\sum_{i=2}^{n} \left(\psi_{0,\text{i}} \cdot w_{\text{inst,Q,i}} \right)} = 2,1 + 4,8 = 6,9\ \text{mm} < \frac{3.200}{300} = 10,7\ \text{mm}$$

Enddurchbiegung aus der charakteristischen Lastkombination:

$$w_{\text{fin}} = w_{\text{inst}} + \underbrace{w_{\text{fin,G}} - w_{\text{inst,G}}}_{\text{Kriechanteil ständige Last}} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left[\psi_{2,\text{i}} \cdot \left(w_{\text{fin,Q,i}} - w_{\text{inst,Q,i}} \right) \right]}_{\text{Kriechanteile veränderliche Lasten}} = 6,9 + 4,0 - 2,1 + 0,5 \cdot \left(9,0 - 4,8 \right) = 10,9\ \text{mm} < \frac{3.200}{200} = 16\ \text{mm}$$

Enddurchbiegung aus der quasi-ständigen Lastkombination:

$$w_{\text{net,fin}} = w_{\text{fin,G}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\psi_{2,\text{i}} \cdot w_{\text{fin,Q,i}} \right) - w_{\text{c}} = 4,0 + 0,5 \cdot 9,0 = 8,5\ \text{mm} < \frac{3.200}{300} = 16\ \text{mm}$$

6 Zusammengesetzte Druckstäbe aus Holz und Holzwerkstoffen mit nachgiebigem Verbund und doppeltsymmetrischem Querschnitt

6.1 Knicknachweis einer genagelten Stütze Typ A aus BSH-Querschnitten

$$A_1 = 300 \cdot 120 = 36.000 \;\; / \;\; A_2 = 120 \cdot 300 = 36.000 \text{ mm}^2 \;\; / \;\; I_{1,y} = \frac{300 \cdot 120^3}{12} = 43,2 \cdot 10^6 \;\; / \;\; I_{2,y} = \frac{120 \cdot 300^3}{12} = 270 \cdot 10^6 \text{ mm}^4 \;\; / \; s = (90/2) = 45 \text{ mm}$$

a) Knicknachweis für die nachgiebige Achse (Knicken um die y-Achse) und Tragfähigkeitsnachweis der Verbindungsmittel

Anfangszustand	Endzustand
$E_{(1/2)} = 12.600$	$E_i = E_{0,\text{mean},i} \big/ \left(1 + \psi_2 \cdot k_{\text{def},i}\right) \to E_{(1/2)} = 12.600 \big/ \left(1 + 0,3 \cdot 0,6\right) = 10.680 \text{ N/mm}^2$
$K_1 = \frac{2}{3} \cdot K_{\text{ser}} = \frac{2}{3} \cdot 1.313 = 875 \text{ N/mm}$	$K_1 = \frac{2}{3} \cdot K_{\text{ser}} \Big/ \left(1 + \psi_2 \cdot 2 \cdot \sqrt{k_{\text{def},1} \cdot k_{\text{def},2}}\right) = 875 \Big/ \left(1 + 0,3 \cdot 2 \cdot \sqrt{0,6 \cdot 0,6}\right) = 644 \text{ N/mm}$
$\gamma_1 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot s_1}{K_1 \cdot l^2}} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 \cdot 12.600 \cdot 36.000 \cdot 45}{875 \cdot 5.800^2}} = 0,127$	$\gamma_1 = \dfrac{1}{1 + \dfrac{\pi^2 \cdot 10.700 \cdot 36.000 \cdot 45}{644 \cdot 5.800^2}} = 0,112$

$$a_1 = \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{120 + 300}{2} = 210 \text{ mm}$$

Längssteifigkeit: $(EA)_{\text{tot}} = \sum_i E_i \cdot A_i = 2 \cdot E_1 \cdot A_1 + E_2 \cdot A_2 = E_1 \cdot (2 \cdot A_1 + A_2)$

$(EA)_{\text{tot}} = 12.600 \cdot (2 \cdot 36.000 + 36.000) = 1,361 \cdot 10^9 \text{ N}$	$(EA)_{\text{tot}} = 10.700 \cdot (2 \cdot 36.000 + 36.000) = 1,156 \cdot 10^9 \text{ N}$

Effektive Biegesteifigkeit: $(E \cdot I)_{y,\text{ef}} = 2 \cdot E_1 \cdot \left(I_{1,y} + \gamma_1 \cdot A_1 \cdot a_1^2\right) + E_2 \cdot I_{2,y} = E_1 \cdot \left[2 \cdot \left(I_{1,y} + \gamma_1 \cdot A_1 \cdot a_1^2\right) + I_{2,y}\right]$

$(E \cdot I)_{y,\text{ef}} = 12.600 \cdot \left[2 \cdot \left(43,2 \cdot 10^6 + 0,127 \cdot 36.000 \cdot 210^2\right) + 270 \cdot 10^6\right]$	$(E \cdot I)_{y,\text{ef}} = 10.700 \cdot \left[2 \cdot \left(43,2 \cdot 10^6 + 0,112 \cdot 36.000 \cdot 210^2\right) + 270 \cdot 10^6\right]$
$(E \cdot I)_{y,\text{ef}} = 9,591 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$	$(E \cdot I)_{y,\text{ef}} = 7,632 \cdot 10^{12} \text{ Nmm}^2$

Schlankheitsgrad und Knickbeiwert $k_{(1/2),c,y}$ für die nachgiebige Achse: $i_{y,ef} = \sqrt{\left(E \cdot I\right)_{y,ef} / \left(E \cdot A\right)_{tot}}$ und $\lambda_y = \dfrac{l_y}{i_{y,ef}}$

Anfangszustand	Endzustand
$i_{y,ef} = \sqrt{9{,}591 \cdot 10^{12} / 1{,}361 \cdot 10^{9}} = 83{,}95\ \text{mm} \rightarrow \lambda_{y,ef} = \dfrac{5.800}{83{,}95} = 69{,}1$	$i_{y,ef} = \sqrt{7{,}632 \cdot 10^{12} / 1{,}156 \cdot 10^{9}} = 81{,}25\ \text{mm} \rightarrow \lambda_{y,ef} = \dfrac{5.800}{81{,}25} = 71{,}4$
$k_{1,c,y} = k_{2,c,y} = 0{,}666$	$k_{1,c,y} = k_{2,c,y} = 0{,}634$

Druckspannungen $\sigma_{i,c,d} = \dfrac{F_d \cdot E_i}{\left(EA\right)_{tot}}$

Anfangszustand	Endzustand
$\sigma_{1,c,d} = \sigma_{2,c,d} = \dfrac{1.050.000 \cdot 12.600}{1{,}361 \cdot 10^{9}} = 9{,}72\ \text{N/mm}^2$	$\sigma_{1,c,d} = \sigma_{2,c,d} = \dfrac{1.050.000 \cdot 10.700}{1{,}156 \cdot 10^{9}} = 9{,}72\ \text{N/mm}^2$

Knicknachweis für die nachgiebige Achse: $\dfrac{\sigma_{i,c,d}}{k_{i,c,y} \cdot f_{i,c,d}} \leq 1$ mit $f_{c,d} = 1{,}125 \cdot 16{,}3 = 18{,}3\ \text{N/mm}^2$

Anfangszustand	Endzustand
$\dfrac{\sigma_{1,c,d}}{k_{1,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{\sigma_{2,c,d}}{k_{2,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{9{,}72}{0{,}666 \cdot 18{,}3} = 0{,}80 < 1$	$\dfrac{\sigma_{1,c,d}}{k_{1,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{\sigma_{2,c,d}}{k_{2,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{9{,}72}{0{,}634 \cdot 18{,}3} = 0{,}84 < 1$

b) Tragfähigkeitsnachweis der Verbindungsmittel

und Scherkraft im Nagel: $F_{1,d} = \dfrac{V_d \cdot \gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot s_1}{\left(E \cdot I\right)_{ef}}$ mit angenommener Querkraft : $\lambda_{y,ef} \geq 60 \rightarrow V_d = \dfrac{F_{c,d}}{60 \cdot k_{c,y}}$

Anfangszustand	Endzustand
$V_d = \dfrac{1.050.000}{60 \cdot 0{,}666} = 26.276\ \text{N}$	$V_d = \dfrac{1.050.000}{60 \cdot 0{,}634} = 27.603\ \text{N}$
$F_{1,v,Ed} = \dfrac{26.276 \cdot 0{,}127 \cdot 12.600 \cdot 36.000 \cdot 210 \cdot 45}{9{,}591 \cdot 10^{12}} = 1.491\ \text{N}$	$F_{1,v,Ed} = \dfrac{27.603 \cdot 0{,}112 \cdot 10.700 \cdot 36.000 \cdot 210 \cdot 45}{7{,}632 \cdot 10^{12}} = 1.475\ \text{N}$
$\dfrac{F_{1,v,Ed}}{\left(n_{ef}/n\right) \cdot F_{1,v,Rd}} = \dfrac{1.491}{1{,}0 \cdot 2.230} = 0{,}67 < 1$	$\dfrac{F_{1,v,Ed}}{\left(n_{ef}/n\right) \cdot F_{1,v,Rd}} = \dfrac{1.475}{1{,}0 \cdot 2.230} = 0{,}66 < 1$

c) Knicknachweis für die starre Achse (Knicken um die z-Achse)

Anfangszustand	Endzustand

Biegesteifigkeit: $\left(E \cdot I\right)_{z,ef} = 2 \cdot E_1 \cdot I_{1,z} + E_2 \cdot I_{2,z}$; Trägheitsradius: $i_z = \sqrt{\left(E \cdot I\right)_z / \left(E \cdot A\right)_{tot}}$; Schlankheitsgrad: $\lambda_z = \dfrac{l_z}{i_z}$

$$I_{1,z} = \frac{300^3 \cdot 120}{12} = 270 \cdot 10^6 \;\; / \;\; I_{2,z} = \frac{120^3 \cdot 300}{12} = 43{,}2 \cdot 10^6 \text{ mm}^4$$

$(E \cdot I)_{z,ef} = 12.600 \cdot \left(2 \cdot 270 \cdot 10^6 + 43{,}2 \cdot 10^6\right) = 7{,}348 \cdot 10^{12}$	$(E \cdot I)_{z,ef} = 10.700 \cdot \left(2 \cdot 270 \cdot 10^6 + 43{,}2 \cdot 10^6\right) = 6{,}240 \cdot 10^{12}$
$i_{z,ef} = \sqrt{7{,}348 \cdot 10^{12} / 1{,}361 \cdot 10^9} = 73{,}48 \text{ mm} \rightarrow \lambda_z = \frac{5.800}{73{,}48} = 78{,}9$	$i_{z,ef} = \sqrt{6{,}240 \cdot 10^{12} / 1{,}156 \cdot 10^9} = 73{,}47 \text{ mm} \rightarrow \lambda_y = \frac{5.800}{73{,}47} = 78{,}9$

Knicknachweis für die starre Achse ist maßgeblich

$$k_{c,z} = 0{,}540 \rightarrow \frac{\sigma_{i,c,d}}{k_{i,c,z} \cdot f_{i,c,d}} = \frac{\sigma_{c,d}}{k_{c,z} \cdot f_{c,d}} = \frac{9{,}72}{0{,}540 \cdot 18{,}3} = 0{,}98 < 1$$

6.2 Knicknachweis einer genagelten Stütze Typ B aus BSH- und NH-Querschnitten

$$A_1 = 2\cdot 80\cdot 100 = 16.000 \;/\; A_2 = 90\cdot 450 = 40.500\ \text{mm}^2 \;/\; I_{1,y} = \frac{160\cdot 100^3}{12} = 13{,}33\cdot 10^6 \;/\; I_{2,y} = \frac{90\cdot 450^3}{12} = 683{,}4\cdot 10^6\ \text{mm}^4 \;/\; s = (50/2) = 25\ \text{mm}$$

a) Knicknachweis für die y-Achse (nachgiebige Achse)

Anfangszustand	Endzustand
$E_1 = 11.000 \;/\; E_2 = 11.600$	$E_i = E_{0,\text{mean},i}\big/\left(1+\psi_2\cdot k_{\text{def},i}\right)$ $E_1 = 11.000/(1+0{,}8\cdot 0{,}6) = 7.430\ \text{N/mm}^2$ $E_2 = 11.600/(1+0{,}8\cdot 0{,}6) = 7.840\ \text{N/mm}^2$
$\rho_k = \sqrt{350\cdot 380} = 364{,}7 \to K_{ser} = \frac{\rho_k^{1,5}}{30}\cdot d^{0,8} = 787\ \text{N/mm}$	$K_1 = \frac{2}{3}\cdot K_{ser}\Big/\left(1+\psi_2\cdot 2\cdot\sqrt{k_{\text{def},1}\cdot k_{\text{def},2}}\right)$
$K_1 = \frac{2}{3}\cdot 787 = 525\ \text{N/mm}$	$= \frac{2}{3}\cdot 787\Big/\left(1+0{,}8\cdot 2\cdot\sqrt{0{,}6\cdot 0{,}6}\right) = 268\ \text{N/mm}$
$\gamma_1 = \frac{1}{1+\frac{\pi^2\cdot E_1\cdot A_1\cdot s_1}{K_1\cdot l^2}} = \frac{1}{1+\frac{\pi^2\cdot 11.000\cdot 16.000\cdot 25}{525\cdot 9.700^2}} = 0{,}532$	$\gamma_1 = \frac{1}{1+\frac{\pi^2\cdot 7.430\cdot 16.000\cdot 25}{268\cdot 9.700^2}} = 0{,}462$

$$a_1 = \frac{h_1+h_2}{2} = \frac{-100+450}{2} = 175\ \text{mm}$$

Längssteifigkeit: $(EA)_{tot} = \sum_i E_i\cdot A_i = 2\cdot E_1\cdot A_1 + E_2\cdot A_2$

Anfangszustand	Endzustand
$(EA)_{tot} = (2\cdot 11.000\cdot 16.000 + 11.600\cdot 40.500) = 0{,}822\cdot 10^9\ \text{N}$	$(EA)_{tot} = (2\cdot 7.430\cdot 16.000 + 7.840\cdot 40.500) = 0{,}555\cdot 10^9\ \text{N}$

Effektive Biegesteifigkeit: $(E\cdot I)_{y,ef} = 2\cdot E_1\cdot\left(I_{1,y}+\gamma_1\cdot A_1\cdot a_1^2\right) + E_2\cdot I_{2,y}$

Anfangszustand	Endzustand
$(E\cdot I)_{y,ef} = 2\cdot 11.000\cdot\left(13{,}33\cdot 10^6 + 0{,}532\cdot 16.000\cdot 175^2\right) + 11.600\cdot 683{,}4\cdot 10^6$ $(E\cdot I)_{y,ef} = 13{,}96\cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2$	$(E\cdot I)_{y,ef} = 2\cdot 7.430\cdot\left(13{,}33\cdot 10^6 + 0{,}462\cdot 16.000\cdot 175^2\right) + 7.840\cdot 683{,}4\cdot 10^6$ $(E\cdot I)_{y,ef} = 8{,}92\cdot 10^{12}\ \text{Nmm}^2$

Schlankheitsgrad und Knickbeiwert $k_{(1/2),c,y}$ für die nachgiebige Achse: $i_{y,ef} = \sqrt{(E\cdot I)_{y,ef}\big/(E\cdot A)_{tot}}$ und $\lambda_y = \frac{l_y}{i_{y,ef}}$

Anfangszustand	Endzustand
$i_{y,ef} = \sqrt{13{,}96\cdot 10^{12}\big/0{,}822\cdot 10^9} = 130{,}3\ \text{mm} \to \lambda_{y,ef} = \frac{9.700}{130{,}3} = 74{,}4$	$i_{y,ef} = \sqrt{8{,}92\cdot 10^{12}\big/0{,}555\cdot 10^9} = 126{,}8\ \text{mm} \to \lambda_{y,ef} = \frac{9.700}{126{,}8} = 76{,}5$

Anfangszustand	Endzustand
$k_{1,c,y} = 0{,}505$ / $k_{2,c,y} = 0{,}603$	$k_{1,c,y} = 0{,}483$ / $k_{2,c,y} = 0{,}577$

Druckspannungen $\sigma_{i,c,d} = \dfrac{F_d \cdot E_i}{(EA)_{tot}}$

Anfangszustand	Endzustand
$\sigma_{1,c,d} = \dfrac{350.000 \cdot 11.000}{0{,}822 \cdot 10^9} = 4{,}68 \text{ N/mm}^2$ / $\sigma_{2,c,d} = \dfrac{350.000 \cdot 11.600}{0{,}822 \cdot 10^9} = 4{,}94 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{1,c,d} = \dfrac{350.000 \cdot 7.430}{0{,}555 \cdot 10^9} = 4{,}68 \text{ N/mm}^2$ / $\sigma_{2,c,d} = \dfrac{350.000 \cdot 7.840}{0{,}555 \cdot 10^9} = 4{,}94 \text{ N/mm}^2$

Knicknachweis für die nachgiebige Achse: $\dfrac{\sigma_{i,c,d}}{k_{i,c,y} \cdot f_{i,c,d}} \leq 1$ mit $f_{1,c,d} = 0{,}60 \cdot 21/1{,}3 = 9{,}69 \text{ N/mm}^2$ / $f_{2,c,d} = 0{,}60 \cdot 24/1{,}3 = 11{,}1 \text{ N/mm}^2$

Anfangszustand	Endzustand
$\dfrac{\sigma_{1,c,d}}{k_{1,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{4{,}68}{0{,}505 \cdot 9{,}69} = 0{,}96 < 1$ / $\dfrac{\sigma_{2,c,d}}{k_{2,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{4{,}94}{0{,}603 \cdot 11{,}1} = 0{,}74 < 1$	$\dfrac{\sigma_{1,c,d}}{k_{1,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{4{,}68}{0{,}483 \cdot 9{,}69} \simeq 1$ / $\dfrac{\sigma_{2,c,d}}{k_{2,c,y} \cdot f_{c,d}} = \dfrac{4{,}94}{0{,}577 \cdot 11{,}1} = 0{,}77 < 1$

b) Tragfähigkeitsnachweis der Verbindungsmittel mit $F_{v,Rd} = 590 \text{ N}$

und Scherkraft im Nagel: $F_{1,d} = \dfrac{V_d \cdot \gamma_1 \cdot E_1 \cdot A_1 \cdot a_1 \cdot s_1}{(E \cdot I)_{ef}}$ mit angenommener Querkraft : $\lambda_{y,ef} \geq 60 \rightarrow V_d = \dfrac{F_{c,d}}{60 \cdot k_{c,y}}$

Anfangszustand	Endzustand
$V_d = \dfrac{350.000}{60 \cdot 0{,}501} = 11.640 \text{ N}$	$V_d = \dfrac{350.000}{60 \cdot 0{,}480} = 12.150 \text{ N}$
$F_{1,v,Ed} = \dfrac{11.640 \cdot 0{,}532 \cdot 11.000 \cdot 16.000 \cdot 175 \cdot 25}{13{,}96 \cdot 10^{12}} = 342 \text{ N}$	$F_{1,v,Ed} = \dfrac{12.150 \cdot 0{,}462 \cdot 7.430 \cdot 16.000 \cdot 175 \cdot 25}{8{,}92 \cdot 10^{12}} = 328 \text{ N}$
$\dfrac{F_{1,v,Ed}}{(n_{ef}/n) \cdot F_{1,v,Rd}} = \dfrac{342}{1{,}0 \cdot 590} = 0{,}58 < 1$	$\dfrac{F_{1,v,Ed}}{(n_{ef}/n) \cdot F_{1,v,Rd}} = \dfrac{328}{1{,}0 \cdot 590} = 0{,}56 < 1$